

# EL ESTADO DEL ARTE EN LA MODELACIÓN DE PROBLEMAS DE TRANSITO.

ALEJANDRO GOMEZ RESTREPO



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
FACULTAD DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA  
SEDE MANIZALES  
Diciembre de 2005

EL ESTADO DEL ARTE EN LA MODELACIÓN DE PROBLEMAS DE TRANSITO.

ALEJANDRO GOMEZ RESTREPO

Monografía para optar al título de:  
Especialista en Vías y Transporte

DIRECTOR:  
FRANCISCO JAVIER GARCÍA O.  
INGENIERO CIVIL

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
FACULTAD DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA  
SEDE MANIZALES  
DICIEMBRE de 2005

## RESUMEN

Los problemas de tránsito son cada vez más abundantes debido al gran desarrollo tecnológico masivo de la humanidad, este gran desarrollo viene de la mano con el incremento del parque automotor de las ciudades las cuales se ven cada vez más congestionadas, es deber de los organismos de tránsito de cada ciudad controlar adecuadamente los problemas que la congestión lleva.

En este trabajo de grado se realiza una recopilación de los tipos de modelación de redes mas actuales, los cuales son utilizados en muchas partes del mundo, estos diferentes tipos de modelos matemáticos son usados en su mayoría por programas computacionales los cuales en muchas ocasiones integran mas de uno de estos modelos para resolver un problema de tránsito específico.

En esta monografía podemos encontrar algunos de los métodos más reconocidos y usados en el campo, como por ejemplo la programación de los semáforos, su coordinación en redes, giro a la izquierda y la modelación de redes en ciudades.

## ABSTRACT

Traffic issues are more common every day due to the great technological development of humanity; this overwhelming development comes hand to hand with the growing increase of motor vehicles in the cities where traffic jams are getting worse over time. It is a task of the traffic authorities in every city to control the problems caused by traffic jams.

In this final project a compilation which includes the types of the most common models for the traffic networks has been carried out, these are used all over the world and they also include different types of mathematical models which are mostly used by computer programs that apply many of these models to solve a specific traffic problem.

In this monograph we can find some of the most common methods used in the field, such as the traffic lights programming, their setup in networks, turn left and the modeling of networks in the cities. This final project was carried out within the framework of the doctoral thesis by Engineer Francisco Garcia.

## TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN.....	III
ABSTRACT.....	IV
TABLA DE CONTENIDO .....	5
LISTA DE FIGURAS .....	7
LISTA DE TABLAS.....	8
ALCANCE .....	9
INTRODUCCIÓN.....	10
OBJETIVOS .....	11
Objetivo general.....	11
Objetivos específicos.....	11
METODOLOGÍA.....	12
1. DISTRIBUCIÓN DE LOS TIEMPOS SEMAFÓRICOS .....	13
1.1 MODELO DE WEBSTER .....	13
1.2 MODELO AMERICANO .....	19
1.3 MÉTODO SIMULTÁNEO (ALLSOP).....	22
1.4 MODELO SECUENCIAL (AKCELIK) .....	26
2. COORDINACIÓN DE SEMÁFOROS .....	30
2.1 MODELACIÓN DE REDES .....	30
Técnica de modelación .....	31
Histogramas cíclicos de flujo.....	37
Dispersión de pelotones.....	42
3. GIRO A LA IZQUIERDA.....	51
3.1 DISTRIBUCIÓN DE POISSON .....	51
4. MODELACIÓN DE REDES .....	53
4.1 MODELO LINEAL .....	53
4.2 MODELO DE OPORTUNIDAD .....	54
4.3 MÉTODO DE FACTORES DE CRECIMIENTO .....	55

---

4.4 MODELO TIPO PROBIT.....	57
4.5 MODELO DE UTILIDAD.....	58
4.6 MODELO DE ELASTICIDAD.....	58
4.7 MODELO GRAVITACIONAL.....	59
4.8 MODELO DE LA PSEUDO-CONVECCION - DIFUSIÓN.....	61
4.9 MODELO BASADO EN LA TEORÍA CINÉTICA DE GASES.....	67
4.10 MODELO BASADO EN LA TEORÍA DINÁMICA DE FLUIDOS.....	69
4.11 MODELO BASADO EN LA TEORÍA CAR- FOLLOWING.....	71
4.12 MODELO BASADO EN LA TEORÍA DE COLAS.....	74
4.13 MODELO TIPO DIRECTO.....	75
4.14 MODELO DEL AUTÓMATA CELULAR (CA).....	76
4.15 MODELO ESTRUCTURAL.....	79
4.16 MODELO DE EQUILIBRIO OFERTA – DEMANDA. ESTRAUS.....	87
5. NUEVAS APLICACIONES.....	93
5.1 REDES NEURONALES.....	93
5.2 LÓGICA DIFUSA.....	97
APLICACIONES ESPECÍFICAS.....	101
CONCLUSIONES.....	104
BIBLIOGRAFÍA.....	105

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1.1. Fases en una intersección con semáforo .....	13
Figura 1.1.2 Intervalo de cambio de fase. ....	14
Figura 1.1.3 Modelo básico del flujo de saturación .....	17
Figura 1.4.1: Relación demora - tiempo de ciclo.....	27
Figura. 1.4.2: Representación del diseño de fases .....	28
Figura 4.9.1. Diagrama fundamental de flujo de transito .....	68
Figura 4.15.1 Modelo Estructural.....	79
Figura 4.16.1. Secciones de Línea entre Dos Nodos.....	88
Figura 4.16.2. Arcos de Transporte Público Red $G(N,S)$ .....	88
Figura 4.16.3. Ilustración del Árbol de Decisión del Modelo de Demanda.....	90
Figura 5.1.1: Red neuronal multicapa de alimentación hacia delante.....	93
Figura 5.1.2: Un elemento del proceso con la sola conexión del rendimiento. ....	94
Figura 5.1.3: Capa sencilla con sistema de redes de alimentación hacia delante con $m$ unidades de salida .....	95
Figura 5.2.1. Numero triangular difuso.....	98
Figura 5.2.2. Número trapezoidal difuso .....	98
Figura 5.2.3 Valores de una variable lingüística de velocidad. ....	99
Figura 5.2.4. Usual división difusa de $[-1, 1]$ .....	99

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1.2.1 Intervalos de entrada a una intersección semaforizada.....	19
--	----



## ALCANCE

Presentar un documento que contenga la revisión del estado del arte en la modelación de problemas de transito.

De manera global este documento contendrá los siguientes puntos:

- ✓ Distribución de tiempos Semafóricos.
- ✓ Coordinación de semáforos.
- ✓ Giro a la izquierda.
- ✓ Modelación de Redes.

## INTRODUCCIÓN

Con el diseño y ajuste de modelos de transporte, se pretende elaborar un conjunto de "herramientas" y procesos de análisis y evaluación que permiten dar respuesta o aportar información para contestar a preguntas muy frecuentes que se puede hacer cualquier ingeniero de transporte: Cómo incidirá en el tráfico el cierre o peatonalización de una vía, cómo funcionará la red arterial en una aglomeración urbana, etc.,

Con los modelos de transporte se trata de explicar cómo se produce la demanda actual, en general a través de expresiones en forma matemática, en las que se apoyará la prognosis de la demanda futura.

Existen diferentes tipos de modelos, los cuales pueden servir para diferentes clases de situaciones, se podría decir que existe un tipo de modelo adecuado que se ajusta a un problema de transito específico, algunos tipos de modelos no solo se usan para conflictos de tránsitos, muchos fueron diseñados para problemas de otras áreas de la ingeniería o la matemática, pero debido a que estas situaciones para las que fueron diseñados se asimilan en cierta medida a los problemas de transito, fueron "adaptados" para su utilización apropiada. En la monografía que aquí se presenta se describirá básicamente el proceso matemático para la formulación de los modelos de transporte, como también se trataran algunos de los métodos para el diseño de tiempos semafóricos, coordinación de semáforos y el diseño de la bahía de giro a la izquierda.

Cabe anotar que esta monografía se hace en el marco de la tesis Doctoral del Ingeniero Francisco García, profesor de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales

## OBJETIVOS

### *Objetivo general*

Revisión del Estado del arte en la modelación de problemas de transito.

### *Objetivos específicos*

- ✓ Obtener por medios bibliográficos y de revistas del medio, los desarrollos científicos actuales de los problemas del transito que en el alcance se describieron.
- ✓ Obtener por medios bibliográficos y de publicaciones del medio, los modelos matemáticos de los problemas del transito a los que se refiere el alcance.

## METODOLOGÍA

- ✓ Se recopilara la información disponible en las bibliotecas publicas, para de esta forma investigar los modelos que se usan para el desarrollo de los problemas de transito propuestos, esta información se pondrá de forma clara en el trabajo, para ilustrar a los lectores de la mejor forma posible las diferentes metodologías existentes
- ✓ Con base en revistas especializadas se añadirá el desarrollo científico actual de los problemas propuestos, para de esta forma ilustrar la actualidad de estos problemas.

## 1. DISTRIBUCIÓN DE LOS TIEMPOS SEMAFÓRICOS

### 1.1 MODELO DE WEBSTER<sup>1</sup>

#### CÁLCULO DE LOS TIEMPOS DEL SEMÁFORO

La figura 1.1.1 muestra una intersección de cuatro accesos operada con un semáforo de cuatro fases. En ella se observa en forma esquemática los conceptos de longitud de ciclo, intervalos y fases.

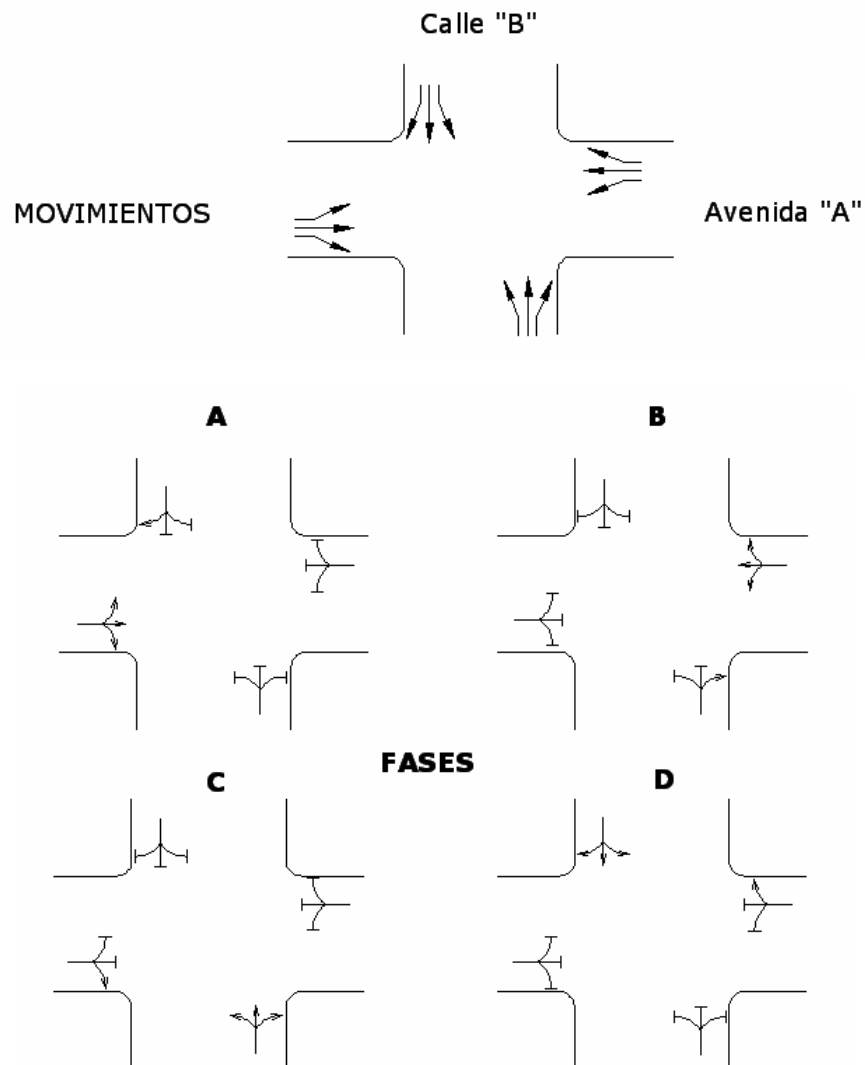


Figura 1.1.1. Fases en una intersección con semáforo

<sup>1</sup> Ingeniería de transito. Fundamentos y aplicaciones. 7ª Edición. Rafael Cal y Mayor. James Cárdenas G. Pagina 397 a 406

A continuación se presentan de manera general los diversos elementos a tener en cuenta en el cálculo de los tiempos del semáforo y su reparto en las diferentes fases:

### 1. Intervalo de cambio de fase

Para calcular el intervalo de cambio de fase, que considere el tiempo de reacción del conductor, tiempo y espacio de deceleración y el tiempo necesario de despeje de la intersección, de acuerdo a la figura 1.1.2, se puede utilizar la siguiente expresión

Intervalo de cambio = Ámbar + Todo Rojo

Donde:

$$y = \left( t + \frac{v}{2a} \right) + \left( \frac{W + L}{v} \right) \quad (1.1.1)$$

$y$  = intervalo de cambio de fase, ámbar más todo rojo (s)

$t$  = tiempo de percepción-reacción del conductor (usualmente 1.00 s)

$v$  - velocidad de aproximación de los vehículos (m/s)

$a$  - tasa de deceleración (valor usual 3.05 m/s<sup>2</sup>)

$W$  - ancho de la intersección (m)

$L$  - longitud del vehículo (valor sugerido 6.10 m)



Figura 1.1.2 Intervalo de cambio de fase.

En la ecuación (1.1.1) y en la figura 1.1.2, el término  $v/2a$  representa el tiempo necesario para recorrer la distancia de parada con deceleración  $a$  y velocidad  $v$ , y el término  $(W + L)/v$  es el tiempo para cruzar la intersección. Los dos primeros términos,  $t + v/2a$ , identifican el *intervalo de cambio ámbar* y el tercer término,  $(W + L)/v$ , se asocia al *intervalo de cambio todo rojo*. Con respecto a la

velocidad de aproximación  $v$ , se utiliza la velocidad límite prevaleciente o el percentil 85 de la velocidad,  $P_{85}$ .

## 2. Longitud del ciclo

E V. Webster con base en observaciones de campo y simulación de un amplio rango de condiciones de tránsito, demostró que la demora mínima de todos los vehículos en una intersección con semáforo, se puede obtener para una longitud de *ciclo óptimo* de:

$$C_o = \frac{1.5L + 5}{1 - \sum_{i=1}^{\phi} Y_i} \quad (1.1.2)$$

Donde:

$C_o$  - tiempo óptimo de ciclo (s)

$L$  = tiempo total perdido por ciclo (s)

$Y_i$  = máximo valor de la relación entre el flujo actual y el flujo de saturación para el acceso o movimiento o carril crítico de la fase  $i$

$\phi$  = numero de fases

## 3. Vehículos equivalentes

Si todos los vehículos que salen de una intersección con semáforo son automóviles que continúan de frente, se tendrían las tasas máximas de flujo, a intervalos aproximadamente iguales. Sin embargo, en la mayoría de los casos la situación es más compleja por la presencia de vehículos pesados y movimientos hacia la izquierda y hacia la derecha. Para tener en cuenta estos aspectos, es necesario introducir *factores de equivalencia*.

El factor de ajuste por efecto de *vehículos pesados*, se calcula con la siguiente expresión:

$$f_{vp} = \frac{100}{100 + P_C(E_C - 1) + P_B(E_B - 1) + P_R(E_R - 1)} \quad (1.1.3)$$

Donde:

$f_{vp}$  = factor de ajuste por efecto de vehículos pesados

$P_C$  = porcentaje de camiones

$P_B$  = porcentaje de autobuses

$P_R$  = porcentaje de vehículos recreativos

$E_C$  = automóviles equivalentes a un camión

$E_B$  = automóviles equivalentes a un autobús

$E_R$  = automóviles equivalentes a un vehículo recreativo

Los vehículos pesados o comerciales (camiones y autobuses), por su mayor longitud y menor poder de aceleración que los automóviles, necesitan más tiempo para despejar la intersección. Los

automóviles equivalentes comúnmente utilizados tanto para camiones, EC, como para autobuses,  $E_B$ , varían de 1.4 a 1.6, tomándose un valor medio de 1.5 que supone accesos con pendientes cercanas al 0% y predominio de camiones livianos o medianos. Sin embargo, estos valores pueden ser mayores, como lo informa un estudio de tránsito realizado para la Ciudad de México, en el que se utilizaron 2.0 automóviles equivalentes por un autobús y un camión, respectivamente, y 3.5 automóviles equivalentes por un camión con remolque. Por otra parte, se requiere tener factores por *movimientos de vuelta*, puesto que en estas maniobras los vehículos generalmente consumen mayor tiempo que los vehículos que siguen de frente. Estos factores,  $E_v$ , que se utilizan para convertir automóviles que dan vuelta a automóviles equivalentes que no la dan, varían de 1.4 a 1.6 para vueltas hacia la izquierda y de 1.0 a 1.4 para vueltas hacia la derecha. Igualmente, los volúmenes horarios de máxima demanda,  $VHMD$ , deben ser convertidos a tasas de flujo,  $q$ , a través del factor de la hora de máxima demanda,  $FHMD$ , para el cual, en casos de proyecto y diseño de planes de tiempos del semáforo, se sugiere un valor de 0.95. De esta manera, los *volúmenes horarios mixtos*,  $VHMD$ , se convierten a *flujos de automóviles directos, que no dan vuelta, equivalentes por hora*,  $q_{ADE}$ , mediante la siguiente expresión:

$$q_{ADE} = \frac{VHMD}{FHMD} \left( \frac{1}{f_{VP}} \right) (E_v) \quad (1.1.4)$$

#### 4. Flujo de saturación y tiempo perdido

R. Akcelik<sup>2</sup> Es el investigador que más ha estudiado la capacidad de intersecciones con semáforo, con base en los conceptos de flujo de saturación, automóviles equivalentes, tiempo perdido y verde efectivo, entre otros. Cuando el semáforo cambia a verde, el paso de los vehículos que cruzan la línea de ALTO se incrementa rápidamente a una tasa llamada *flujo de saturación*, la cual permanece constante hasta que la fila de vehículos se disipa o hasta que termina el verde. La tasa de vehículos que cruzan la línea al arrancar es menor durante los primeros segundos, mientras los vehículos aceleran hasta alcanzar una velocidad de marcha normal. Similarmente, durante el periodo posterior a la terminación del verde, la tasa de vehículos que cruzan la línea es menor debido a que algunos vehículos disminuyen su velocidad o se detienen. El flujo de saturación es la tasa máxima de vehículos que cruzan la línea que puede ser obtenida, cuando existen filas y éstas aún persisten hasta el final del periodo verde. En este caso, se tiene un periodo de verde completamente saturado. En la Ciudad de México se han encontrado flujos de saturación del orden de los 1 800 vehículos ligeros por hora de luz verde por carril. La figura 1.1.3 muestra las relaciones fundamentales que caracterizan este fenómeno. La línea punteada indica el modelo básico o curva de *flujo efectivo*, que reemplaza la curva de *flujo actual* de vehículos que cruzan la línea por un rectángulo de igual área, cuya altura es el *flujo de saturación*  $s$  y cuyo ancho es el *tiempo verde efectivo*  $g$ . En otras palabras, el área bajo la curva,  $sg$ , representa el máximo número de vehículos que cruzan la línea en un ciclo promedio. El tiempo entre los comienzos de los periodos de *verde G* y *verde efectivo g*, esto es  $ee'$  se considera como una *pérdida inicial*. Igualmente, el tiempo entre los finales de los periodos de

<sup>2</sup> Akcelik, Rahmi. Traffic Signals: Capacity and Timing analysis, Australian Road Research Board, Research report ARR N° 123, Fourth Reprint, Australia, 1989.



verde y verde efectivo  $ff'$ , se considera como una *ganancia final*. Por lo tanto, el verde efectivo para la fase  $i$  es:

$$g_i = G_i + ff' - ee' \quad (1.1.5)$$

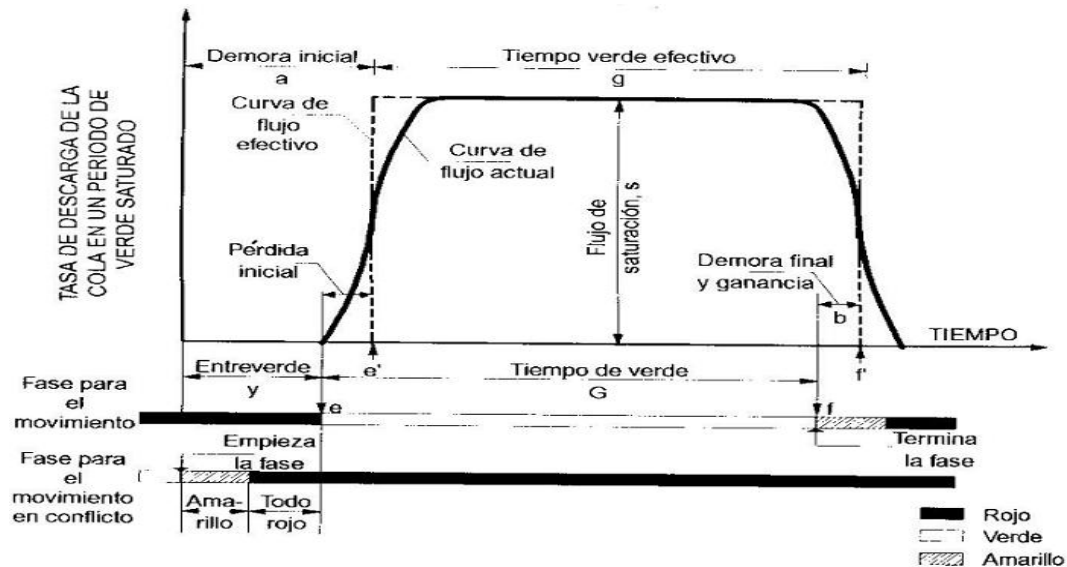


Figura 1.1.3 Modelo básico del flujo de saturación

La *demora inicial*  $a$ , se define como la suma del tiempo entreverde o intervalo de cambio de fase  $y_i$  y la pérdida inicial  $ee'$ :

$$a = y_i + ee'$$

La *demora final*  $b$ , se define simplemente como la ganancia  $ff'$ :

$$b = ff'$$

Entonces el tiempo perdido por fase,  $l_i$ , es la diferencia entre la demora inicial y la ganancia final:

$$l_i = a - b$$

$$l_i = y_i + ee' - ff' \quad (1.1.6)$$

De la ecuación (1.1.5)

$$ee' - ff' = G_i - g_i$$

Remplazando en la ecuación (1.1.6)

$$l_i = y_i + G_i - g_i \quad (1.1.7)$$

Por lo general, el intervalo de cambio de fase  $y_i$  de una fase  $i$  es igual al intervalo ámbar  $A_i$ :

$$y_i = A_i$$

Por lo tanto, la ecuación (1.1.7) se transforma en:

$$l_i = G_i + A_i - g_i \quad (1.1.8)$$

Si se supone que la pérdida inicial  $ee'$  es igual a la ganancia final  $ff'$ , entonces:

$$\begin{aligned} g_i &= G_i \\ l_i &= y_i = A_i \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

El tiempo total perdido por ciclo es:

$$L = \left( \sum_{i=1}^{\phi} l_i \right) + TR \quad (1.1.10)$$

Donde TR representa el tiempo total de todo rojo durante el ciclo, en caso de existir.

##### 5. Asignación de tiempos verdes

El *tiempo verde efectivo total*  $g_T$ , disponible por ciclo para todos los accesos de la intersección, está dado por:

$$g_T = C - L = C - \left[ \left( \sum_{i=1}^{\phi} l_i \right) + TR \right] \quad (1.1.11)$$

Donde:

$g_T$  = tiempo verde efectivo total por ciclo disponible para todos los accesos

C = longitud actual del ciclo (redondeando  $C_0$  a los 5 segundos más cercanos)

Para obtener una demora total mínima en la intersección, el tiempo verde efectivo total  $g_T$  debe distribuirse entre las diferentes fases en proporción a sus valores de  $Y$ , así:

$$g_i = \frac{Y_i}{\sum_{i=1}^{\phi} Y_i} (g_T) = \frac{Y_i}{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{\phi}} (g_T) \quad (1.1.12)$$

Recuérdese que  $Y_i$  es el valor máximo de la relación entre el flujo actual y el flujo de saturación, para el acceso o movimiento o carril crítico de cada fase  $i$ . De la ecuación (1.1.8), el tiempo *verde real*  $G_i$  para cada fase  $i$  se obtiene como:

$$G_i = g_i + l_i - A_i \quad (1.1.13)$$

O lo que es lo mismo para  $\phi$  fases:

$$G_1 = g_1 + l_1 - A_1$$

$$G_2 = g_2 + l_2 - A_2$$

.

.

.

$$G_{\phi} = g_{\phi} + l_{\phi} - A_{\phi}$$

## 1.2 MODELO AMERICANO<sup>3</sup>

### Intervalo de descarga

Los valores  $t_i$ , que son los tiempos que supera el valor del intervalo de descarga al de saturación  $h$  en los primeros vehículos, al ser sumados resulta el tiempo perdido total en el arranque del verde como se indica a continuación:

$$\lambda = \sum_{i=1}^N t_i \quad (1.2.1)$$

Donde:

$\lambda$  = Tiempo perdido total en el arranque del verde [s]

$t_i$  = Tiempo perdido en el arranque del vehículo  $i$  [s]

$N$  = Último vehículo en cola con intervalo de descarga mayor que el de saturación.

### Flujo de saturación

Al inverso del intervalo de saturación se le denomina tasa de descarga a saturación o *flujo de saturación* y se expresa en vehículos mixtos o equivalentes por hora de verde por carril. Si se consideran los valores encontrados por Greenshields como aparece en la Tabla 1.2.1 se puede calcular el flujo de saturación por carril, así:

$$\text{Flujo de saturación} = \frac{3600 \frac{\text{seg}}{h}}{\text{Intervalo de saturación}}$$

Vehículos en cola	Intervalo de entrada	Greenshields
1	$h+t_1$	3,8s
2	$h+t_2$	3,1s
3	$h+t_3$	2,7s
.	.	.
.	.	.
N	$h+t_N$	2,2s
N+1	H	2,1s
N+2	H	2,1s
.	.	.
.	.	.
N	H	2,1s

Tabla 1.2.1 Intervalos de entrada a una intersección semaforizada

*Entreverde* ( $I$ ) comprendido entre el final y el inicio de verdes del semáforo de dos movimientos en fases consecutivas y el *tiempo perdido en la fase* ( $I_\phi$ ) que es el tiempo durante la fase en el cual no se experimenta la circulación vehicular, de dicha figura se deducen algunas igualdades:

$$V = v_e + \lambda_1 - \lambda_2$$

<sup>3</sup> Principios sobre semáforos. Víctor Gabriel Valencia Alaix. Universidad Nacional de Colombia. Sede Medellín. Facultad de Minas. Medellín. 2002.

$$l = I + \lambda_1 - \lambda_2$$

$$I = l - \lambda_1 + \lambda_2$$

$$V + I = v_e + l$$

$$V = v_e + \ell - I$$

$$\sum_{\phi=1}^m (V + I)_{\phi} = \sum_{\phi=1}^m (v_e + l)_{\phi} = C$$

Donde:

Donde:

V = verde del semáforo [s]

$v_e$  = verde efectivo [s]

$\lambda_1$  = tiempo perdido en el arranque del verde [s]

$\lambda_2$  = tiempo ganado en el amarillo [s] o prolongación del verde efectivo

$l_{\phi}$  = tiempo perdido en la fase  $\phi$  [s]

I = entreverde [s]

$\phi$  = fase del semáforo

m = número de fases en el ciclo

C = duración del ciclo [s]

Capacidad de un movimiento.

$$Q = S \frac{v_e}{c}$$

Donde:

Q = Capacidad del movimiento en veh/h

S = flujo de saturación en veh/h.v.

$v_e$  = Duración del verde efectivo [s]

c = Duración del ciclo [s]

Entreverde (I). Según GIBSON, 1988,

$$I = AM + \left[ RR \text{ o } \left( \frac{R}{A} \right) \right]$$

Donde:

I = Entreverde del movimiento que gana el derecho de paso [s]

AM = Duración del intervalo de amarillo del movimiento que pierde el derecho de paso. [s].

RR = Duración del intervalo de todo-rojo del movimiento que pierde el derecho de paso. [s].

R/A = Duración del intervalo de rojo-amarillo = 2 s

Amarillo (AM)

$$AM = TR + \frac{v}{2d + [2gi]}$$

Donde:

TR = Tiempo de reacción del conductor [s]  $\approx 1$  s

$v$  = Velocidad a la que se circulan los vehículos por la vía sin influencia del semáforo [m/s]  
 $g$  = Aceleración de la gravedad = 9,8 m/s<sup>2</sup>  
 $i$  = Pendiente longitudinal de la vía [%]. Signo negativo si es descendente y viceversa.  
 $d$  = tasa de deceleración o frenado = 2,5 m/s<sup>2</sup>

Todo Rojo (RR)

$$RR = \frac{d_i + l_i}{v_i} - \frac{d_{i+1}}{v_{i+1}}$$

Donde:

$d_i$  = Distancia desde la línea de detención del movimiento que pierde el derecho de paso y el punto de conflicto con el movimiento que gana el derecho de paso [m]

$l_i$  = Longitud del vehículo que pierde el derecho de paso [m].

$v_i$  = Velocidad de aproximación del vehículo que pierde el derecho de paso [m/s]

$d_{i+1}$  = Distancia desde la línea de detención del movimiento que gana el derecho de paso hasta el punto de conflicto con el movimiento que pierde el derecho de paso.

$v_{i+1}$  = Velocidad de aproximación del vehículo que gana el derecho de paso [m/s]

Verde mínimo

$$v_{min}(vehicular) = [6, 10]$$

$$v_{min}(peatonal) = vp + vi$$

$$vi = \frac{a}{1,4}$$

$$vp = \max \left[ 5, \frac{a}{2 * 1,4} \right]$$

$$v_{min}(peatonal) = \max \left[ 5 + \frac{a}{1,4}, 1,1a \right]$$

Donde

$v$  = Verde vehicular

$a$  = ancho de la calzada

$vi$  = verde intermitente peatonal

$vp$  = verde peatonal

### 1.3 MÉTODO SIMULTÁNEO (ALLSOP)<sup>4</sup>

Este procedimiento, desarrollado por Allsop (1971) aborda el problema de determinar el ciclo y repartos de un semáforo aislado usando programación lineal.

Para esto se definen las siguientes variables para una intersección con  $\underline{n}$  movimientos. Así, para cada movimiento  $j = 1, \dots, n$ ; sea:

$q_j$	=	flujo
$s_j$	=	flujo de saturación
$u_j$	=	razón de verde efectivo
$x_{pj}$	=	grado de saturación práctico

Si el semáforo opera con  $\underline{m}$  fases, para cada  $i = \dots, m$ ; se tiene:

$C$	=	tiempo de ciclo
$w_i$	=	razón verde efectivo
$l_i$	=	tiempo perdido
$V_{emini}$	=	verde efectivo mínimo
$A$	=	$(a_{ij})$ = matriz fase ( $i$ ) – movimiento ( $j$ )
$A_{ij}$	=	$\begin{cases} 1, & \text{si mov. } j \text{ tiene verde en fase } i \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$

Variables derivadas de las anteriores o adicionales son:

$L$	=	$\sum_{i=1}^m l_i$ = tiempo perdido total.
$a_{oj}$	=	proporción de $L$ que es verde efectivo para mov. $j$ .
$C$	=	tiempo de ciclo máximo (o especificado y fijo).
$w_o$	=	$L/C$
$k_i$	=	$v_e \text{ } \underline{mín} i / L$
$k_o$	=	$L/C_o$

Luego: 
$$u_j = \sum_{i=0}^m a_{ij} w_i$$

Restricciones que deben cumplirse para el semáforo son:

- a) Máximo tiempo de ciclo:  $C \leq C_o$ .

<sup>4</sup> Referencias de clase, magíster en ingeniería de transporte. Universidad de Chile. Facultad de ciencias físicas y matemáticas. Departamento de ingeniería Civil. Sección ingeniería de transporte

$$\Rightarrow L/w_o \leq L/k_o$$

$$\therefore w_o \geq k_o \quad (1)$$

b) Verdes mínimos:  $v_{ei} \geq v_{e_{\min i}}$

$$\Rightarrow w_i \geq v_{e_{\min i}}/C = (v_{e_{\min}}/L)(L/c)$$

$$\therefore w_i \geq k_i w_o \quad (2)$$

c) Máximo grado de saturación:  $q_j \leq \hat{Q}_{pj} = x_{pj} s_j \mu_j$

$$\Rightarrow u_j \geq q_j / x_{pj} s_j = b_j$$

$$\therefore u_j \geq b_j \quad (3)$$

d) consistencia entre verdes efectivos y tiempo de ciclo:

$$\therefore \sum_{i=0}^m w_i = 1 \quad (4)$$

Normalmente son datos del problema considerando los siguientes:  $C_o, a_{ij}, L, b_j$ .

Luego, las incógnitas a determinar son:  $C$  y  $w_i$  ( $i=0, \dots, m$ )

Para resolver el problema se pueden especificar dos funciones objetivos básicas (pueden haber otras derivadas):

- Minimizar la demora total en la intersección.
- Maximizar la capacidad de la intersección.

a) Minimización de demoras:

La demora total para un movimiento queda expresada por:

$$D_j = q_j d_j$$

Para  $d_j$  se usa una expresión aproximada (Webster):

$$d_j = 0.9 \left[ \frac{C(1-u_j)^2}{2(1-x_j u_j)} + \frac{x_j^2}{2_{q_j}(1-x_j)} \right]$$

Esta expresión supone:

- Llegadas aleatorias (semáforo aislado);
- Período de verde de cada movimiento es un bloque continuo dentro del ciclo.

Luego, la función objetivo para este caso es:

$$\text{Min} \sum_{j=1}^n p_j q_j d_j$$

s.a. : restricciones (1), (2), (3), (4) y no-negatividad.

donde  $p_j$  es un ponderador arbitrario que sirve para incluir efectos como:

- Factores de composición del tráfico.
- Tasas de ocupación (para mín. demoras a personas en vez de veh.)
- Pesos especiales (para limitar long. cola, etc.)

Con esto, se tiene un problema que tiene solución única siempre que no exista sobre saturación (que algún  $x_i > x_{pi}$ ). Una de sus virtudes es que considera a todos los movimientos (críticos y no-críticos). Su algoritmo está implementado en el programa SIGSET (y en sus derivados SIGCOM, CAPSET, etc.).

b) Maximización de capacidad:

El objetivo anterior tiende a buscar comparaciones entre diversos movimientos, para un nivel de flujos dado. No obstante, cuando existen fuertes variaciones en los niveles de flujo por movimiento, el minimizar las demoras promedio puede no ser el mejor objetivo. También, si se está próximo a la saturación de la intersección, la posibilidad de alcanzada por fluctuaciones de flujo a los que se trata de minimizar las demoras es alta.

En las anteriores condiciones, es mejor tratar de controlar la posibilidad de saturación. Esto puede especificarse en términos de maximizar la capacidad de la intersección como un todo. Esta no puede ser definida como un número máximo de vehículos que pueden cruzar la intersección porque es un indicador ambiguo, ya que hay diversas formas de lograrlo a partir de combinaciones de flujos por rama.

Una definición no ambigua del concepto de capacidad total de la intersección es definida para una estructura de flujos dada. Esto se logra mediante un multiplicador común de todos los flujos que acceden a la intersección (li).

Luego, la restricción del máximo grado de saturación debe replantearse como sigue:



$$\mu q_j \leq Q_{pj} = x_{pj} s_j u_j$$

$$\therefore u_j \geq \mu b_j \quad (5)$$

Entonces, el problema es encontrar  $w_i$  ( $i = 0, \dots, m$ ) tal que:

$$\text{Máx } \mu$$

s.a.: restricciones (1), (2), (4), (5) y no-negatividad

Este enfoque está implementado en el programa SIGCAP y en sus combinaciones con SIGSET, tal como CAPSET.

Nótese que en este caso la restricción (1) tiende a ser siempre activa, es decir,  $C = C_o$ .

Este mismo planteamiento puede ser utilizado, no sólo para encontrar la programación que maximice  $\mu$ , sino que también para estimar la capacidad de una intersección con fines de planificación para prever cuándo será necesario considerar proyectos de infraestructura en ella (Intersección a desnivel, por ejemplo).

También, esta formalización sugiere un análisis simple de la reserva de capacidad para una programación dada del semáforo, o sea, conocidos los  $\mu_j$ . Así, si se define:

$$\mu_j^* = \frac{u_j}{b_j} = \frac{x_{pj}}{x_j}$$

entonces, se puede obtener los siguientes indicadores por movimiento:

- Capacidad práctica :  $\hat{Q}_{pj} = \mu_j^* q_j$
- Capacidad de reserva :  $CR_j = (\mu_j^* - 1) q_j$ , ó bien,  
 $CR_j = 100(\mu_j^* - 1)$ , como % del flujo.

Luego, si  $\mu_j^* > 1$  habrá reserva de capacidad para ese movimiento; por el contrario, si  $\mu_j^* < 1$ ,  $CR_j$  entregará el grado de sobresaturación de él.

### 1.4 MODELO SECUENCIAL (AKCELIK)<sup>5</sup>

El enfoque tradicional se basa en la minimización de las demoras a los vehículos de los movimientos críticos, basadas en Webster (1958). Así, según esto, el tiempo de ciclo óptimo de la intersección viene dada por la expresión aproximada siguiente:

$$C_0 = \frac{1.5L + 5}{1 - Y} \quad (seg)$$

No obstante, existen algunas objeciones al criterio de minimización de demoras a los vehículos que pueden plantearse.

La primera en relación con la no-consideración de las demoras a los usuarios, sólo de los vehículos. La incorporación de tasas de ocupación tiende a subsanar éste hecho; sin embargo, si los vehículos de un mismo movimiento están compuestos por corrientes que tienen distintas tasa de ocupación, el uso de tasas de ocupación no parece tan claro para resolver esta objeción. La segregación de corrientes con alta ocupación y otorgarle prioridad (pista sólo bus y prioridad en semáforos, por ejemplo) puede ser una alternativa, pero en presencia de altos flujos de buses y mal comportamiento en paraderos su efecto tiende a desaparecer.

Otra objeción en relación con el consumo de combustible y que se relaciona con el número de detenciones. Estas están también relacionadas con los accidentes, especialmente con los choques por detrás. Luego, una función compuesta de demoras y detenciones propuesta por Akcelik parece ser la respuesta a esto:

$$C_0 = \frac{(1.4 + K)L + 6}{1 - Y}$$

con:

$$k = \begin{cases} 0, & \text{para minimizar demoras} \\ 0.2, & \text{para minimizar demoras y combustibles} \\ 0.4, & \text{para minimizar combustible} \end{cases}$$

No obstante, este criterio sólo considera los movimientos críticos (que definen  $L$  e  $Y$ ), pero también los no-críticos dan origen a consumos de recursos; Para éstos el ciclo óptimo será probablemente menor. Luego, se define un tiempo de ciclo práctico ( $C_p$ ) que asegure que  $x_i < x_p \forall_i$ :

---

<sup>5</sup> Referencias de clase, magíster en ingeniería de transporte. Universidad de Chile. Facultad de ciencias físicas y matemáticas. Departamento de ingeniería Civil. Sección ingeniería de transporte. Akcelik, Rahmi. Traffic Signals: Capacity and timing Analysis. Victoria, Australia, Australian Road Reserach Board. Research Report, ARR 123, 1981.

$$C_p = \frac{L}{1 - U_p}$$

donde:  $U_p = \sum_i Y_i / x_{pi}$  ,  $i \in \text{trayectoria crítica}$

Normalmente,  $C_p < C_o$ , excepto para  $0.9x_p < Y < x_p$ . Cuando una fase queda en verde mínimo, el valor de  $v_{mi} + l_i$  se pone en  $L$  y no se considera en  $U$ .

La relación del tiempo de ciclo con la demora es la que muestra la Figura. 1.4.1

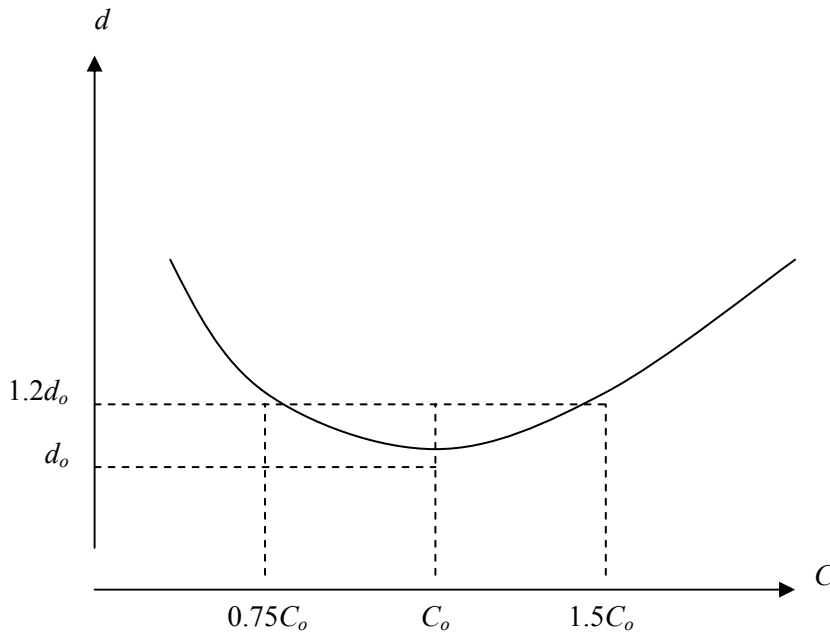


Figura 1.4.1: Relación demora - tiempo de ciclo.

Luego, la elección del tiempo de ciclo puede plantearse en el intervalo  $(0.75 C_o, 1.5 C_o)$  sin efecto sustancial sobre las demoras. Se recomienda elegir un valor entre  $C_o$  y  $C_p$ , con un máximo de 120 seg. y un mínimo (no indispensable) de 40 seg.

Definido el ciclo, la distribución de tiempos de verde según el criterio de optimalidad de minimización de demoras conduce al principio de equisaturación. Así, el verde efectivo disponible a los movimientos críticos es  $(C - L)$ , luego para equisaturación se tiene:

$$v_{ei} = (C - L) \frac{y_i}{Y} \quad , \quad i \in \text{trayectoria crítica}$$

Si no se considera equisaturación, entonces:

$$v_{ei} = (C - L) \frac{\mu_{ip}}{U_p} \quad , \quad i \in \text{trayectoria crítica}$$

es decir,

$$v_{ei} = (C - L) \frac{y_i}{Y} \cdot \left( \frac{x_p}{x_{pi}} \right) \quad , \quad i \in \text{trayectoria crítica}$$

Esta expresión es aplicable en ambos casos, pues si hay equisaturación  $x_i = C^{te}, \forall i$  y  $x = \max\{x_i\} = x_i \forall_i$ .

Cuando hay movimientos controlados por verde mínimos esta expresión no se les aplica. Estos tendrán  $v_e = v_m$  y aparecen en  $L$ , pero se aplica al resto de los movimientos críticos.

Finalmente, los repartos en el semáforo real serán:

$$v_i = v_{ei} + 1_i - I_i$$

Si hay movimientos traslapados que son críticos, los no traslapados pueden ser tratados como fases de un ciclo reducido de duración igual al traslapo. Esto se puede representar mejor en un diagrama de red, en que los nodos son fases y los arcos son movimientos (Figura. 1.4.2).

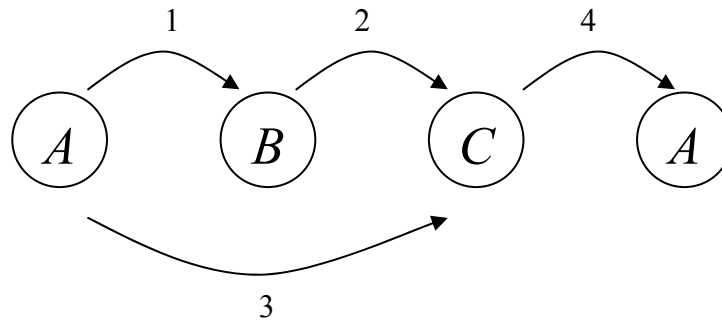


Figura. 1.4.2: Representación del diseño de fases.

En esta figura, si 3 es el movimiento crítico, se toma A - C como ciclo y se tiene:

$$C' = v_{e_3} + l_3$$

$$L' = l_1 + l_2$$

Si, por el contrario, los no traslapados son los críticos, entonces:

$$v_{e_3} = v_{e_1} + v_{e_2} + l_1 + l_2 - l_3$$

## 2. COORDINACIÓN DE SEMÁFOROS

### 2.1 MODELACIÓN DE REDES<sup>6</sup>

Dentro de la simulación de redes se observan distintos conflictos:

- ✓ El primero se refiere a que confluyen trayectorias iguales pero con velocidades distintas. Los distintos conflictos se representan por relaciones velocidad/flujo, a medida que crece el flujo, los grados de libertad de los conductores se reducen. La relación velocidad/flujo trae implícita la capacidad. La velocidad media se viene reduciendo con el aumento del flujo.
- ✓ El segundo de los conflictos se presenta cuando se cruzan trayectorias en caminos (en las intersecciones) dando origen a detenciones, colas, demoras, etc.
- ✓ Un tercer tipo de conflicto son los funcionales, es decir, los que aparecen entre vehículos que están interesados entre el desplazamiento y el acceso. La función de acceso (accesibilidad) esta relacionada con la acción de detenerse y la función de desplazamiento (movilidad) con la de movimiento y ambas son posibles de darse en la misma vía con diferentes grados.

Esto da origen a los conflictos funcionales, muchos de esto influye en los anteriores dos.

El problema siguiente es integrarlo a una red y luego transformar todos estos conflictos dentro de la red en impactos (Consumo de combustible, accidentes, demoras, etc.) que derivan de las características físicas de la red.

Se define la red para cada caso a trabajar a través de definiciones en el espacio-tiempo para una región determinada.

Cómo definir los límites de la región espacio-tiempo de interés?

1) Los límites espaciales de la región:

Las redes están construidas para abarcar un problema determinado, entonces, los límites se definen por el tipo de problema.

Se necesita determinar hasta que límites afectan un problema o un proyecto, debe estar incorporada el área así determinada en la región.

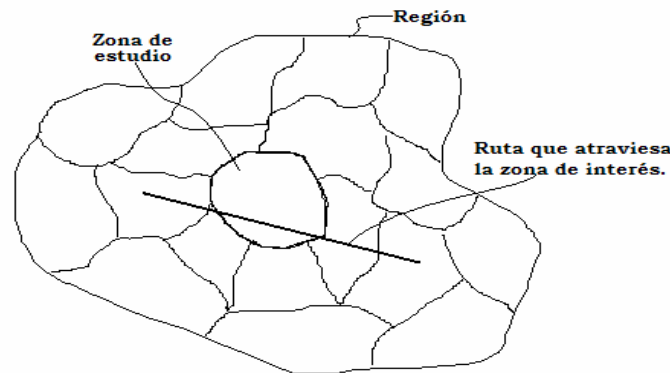
El límite de la región debería ser un lugar geométrico donde todos los puntos de intercambio estuviesen dentro de esa región.

Hay que tratar de acercar el área conceptual a la práctica.

La matriz origen-destino está definida entre la zona de estudio de interés y la exteriores, o sea, los flujos que se originan tienen destino o atraviesan dicha zona de interés.

---

<sup>6</sup> Víctor Gabriel Valencia Alaix. Maestría de Ingeniería - Infraestructuras y Sistemas de Transporte que se ofrece en la Sede Medellín de la Universidad Nacional de Colombia. Asignatura Teoría de Flujo de Tránsito. Si desea conocer la versión completa de este artículo se debe escribir a [vgvalencia@unalmed.edu.co](mailto:vgvalencia@unalmed.edu.co) para su obtención.



2) Los límites respecto al tiempo.

Es posible que algunos parámetros de la red varíen con el tiempo por esto algunas redes se definen para un determinado periodo. Por ejemplo en vías que cambian de sentido de un periodo a otro. En la práctica se evalúa un proyecto con distintas redes con y sin periodo.

### DESCRIPCIÓN DE UNA RED

Una red incorpora la descripción de tres componentes:

- a) La infraestructura: Son las vías, terminales, parqueaderos, etc. Esta se simboliza a través de arcos, que representan tramos de vías y de nodos (Intersecciones, terminales, estrangulamientos, etc.) Los arcos tienen dirección.
- b) La regulación de la circulación: Considera la conexidad (que dos puntos estén conectados), leyes de funcionamiento del tránsito definidas sobre los nodos (Por ejemplo, Intersecciones semaforizadas), otros parámetros que se definen sobre la red.
- c) Los usuarios: Se especifican a través de una matriz origen-destino referenciada con centroides, parámetros característicos de la red ( $s$ ,  $v$ , etc.).

El objetivo es tratar de construir una red que replique la realidad.

Hay distintos estilos de modelación (es un arte, no una ciencia). No hay estilos malos o buenos, sino distintos y que según el criterio propio conviene o no. Este estilo significa asociar a los nodos determinadas características, una capacidad y una cierta regulación (movimientos autorizados en ese nodo, sentidos de tránsito, regulación de la parada).

Los arcos son representados por: una longitud, una velocidad de recorrido y un flujo.

Los centroides solo tienen asociados flujos como origen-destino.

Hay dos enfoques que condicionan las estrategias de representación de la red:

- ✓ Reasignación de flujos: Si se considera fija la demanda, no es necesario considerar fija la asignación. Aquí no se tiene flujos por arco pero si matrices O-D, conectores, centroides.
- ✓ Sin reasignación: Es decir, que hago el supuesto que la asignación es invariante. En este caso ya no necesito la matriz O-D, sino los flujos por arco (Se supone que no se van a modificar).

### *Técnica de modelación*

Está ligada a estilos y métodos computacionales.

1) Arcos: en el arco se dispone de un flujo en el cual puede suceder:

- i) Un flujo heterogéneo: Velocidad media por vehículo diferente, se considera un promedio.
  - ii) Distinguir arcos diferentes para corrientes con diferentes promedios. Con la única precaución que la velocidad debe ser la real. De modo que se puede tener un tramo de vía con diferentes arcos. Disponer de esta posibilidad es muy interesante en nuestros países donde el flujo es mixto y la composición no es típica.
- 2) Nodos: Tienen que interactuar con los arcos. Ahora se considera desde el punto de vista de los vehículos que llegan por un tramo de vía de interés. Y son los movimientos los que indican la dirección que tendrá así como la cola que se formará (se recomienda disponer un arco por cada cola que se formará). Aquí se puede llegar a una contradicción para la definición de los arcos y de los nodos (Se recomienda un arco por tipo de circulación o característica de los vehículos y la otra recomendación es según la cola a formar), entonces, la solución para esto es considerar la línea de detención que contiene un cierto número de movimientos compartiendo la regulación.

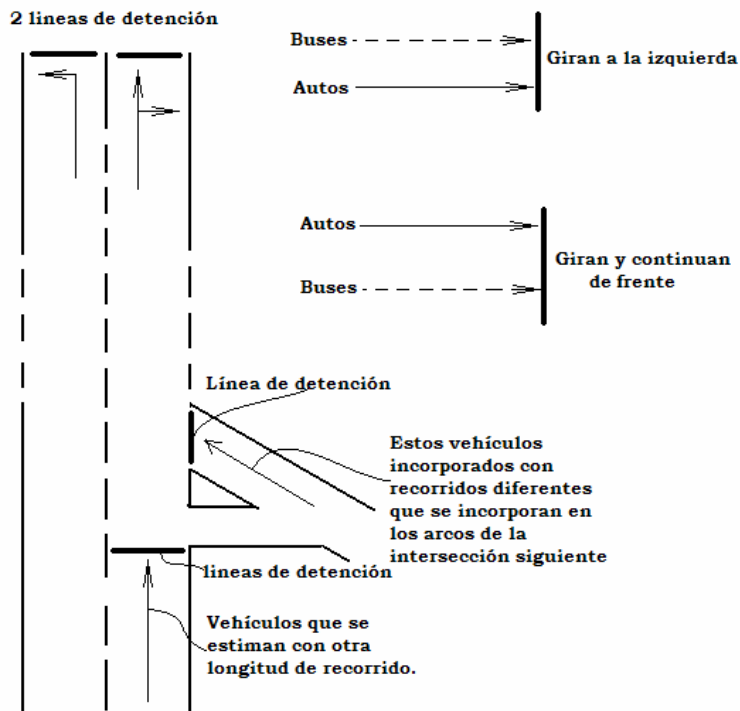
Para distinguir línea de detención se considera como característica que formen colas distintas.

Para distinguir arcos: distintos movimientos, características de vehículos y longitud de recorrido, que formen parte de colas distintas en la intersección.

De este modo existen arcos que comparten línea de detención que significa que comparte la misma capacidad o cola con propiedades comunes, o sea, no puede haber vehículos que comparten colas distintas.

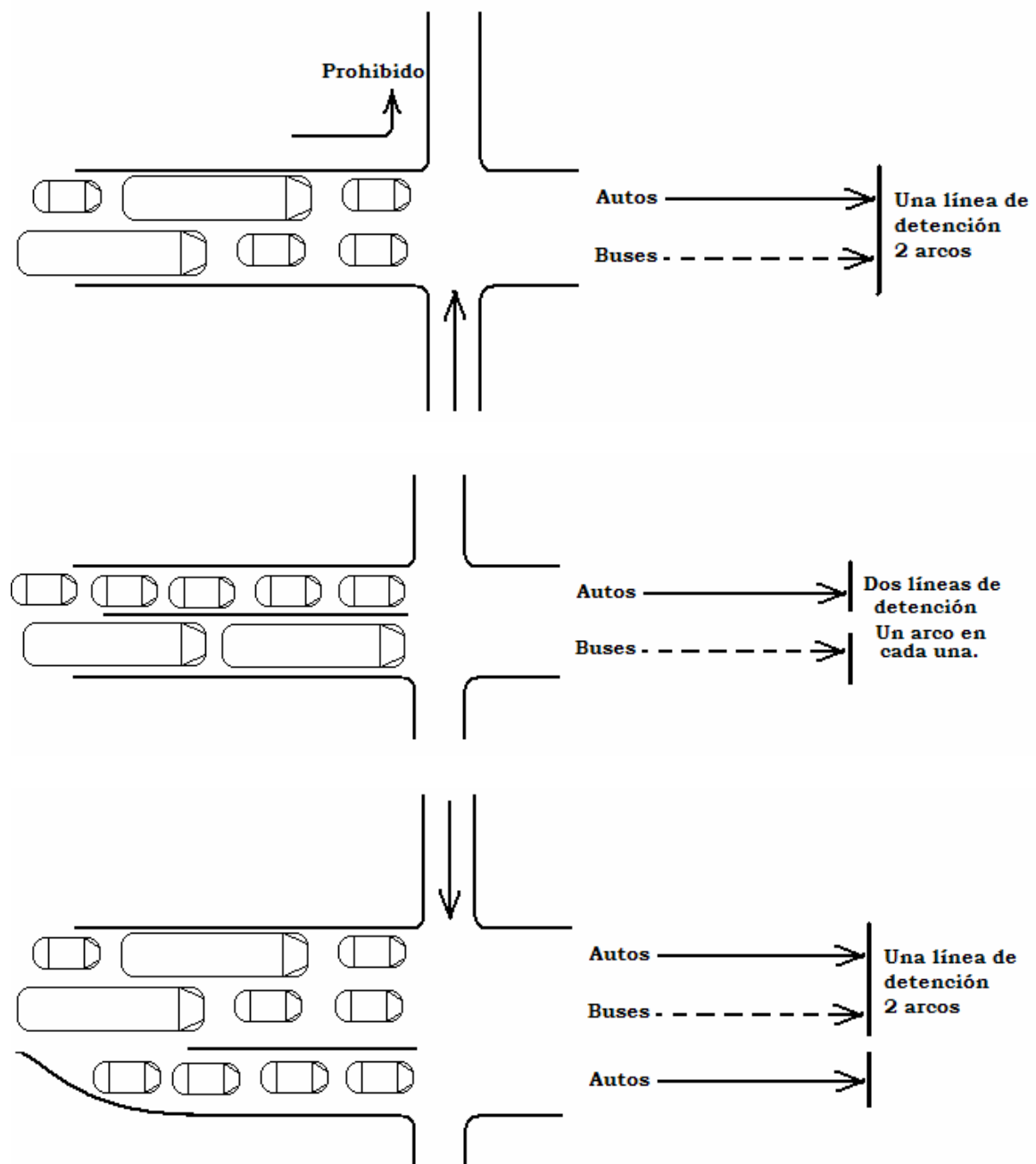
Los modelos de asignación tienen un enfoque, para el tratamiento de redes, menos flexible que los de modelación.

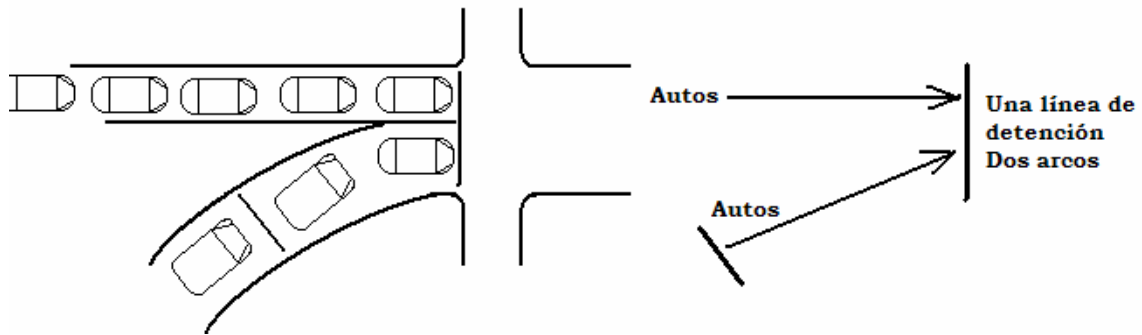
Los flujos de saturación se ligan a los nodos, los arcos van entre líneas de detención no entre nodos, o sea, que los nodos solo retienen la modelación de la regulación de la circulación.



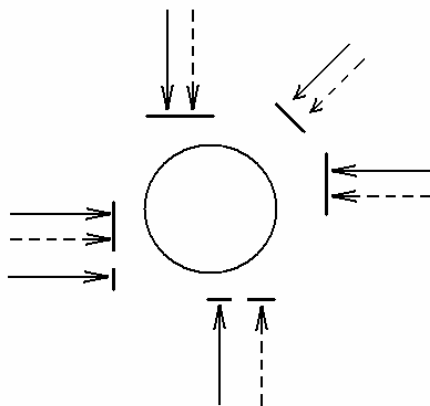


EJEMPLOS:

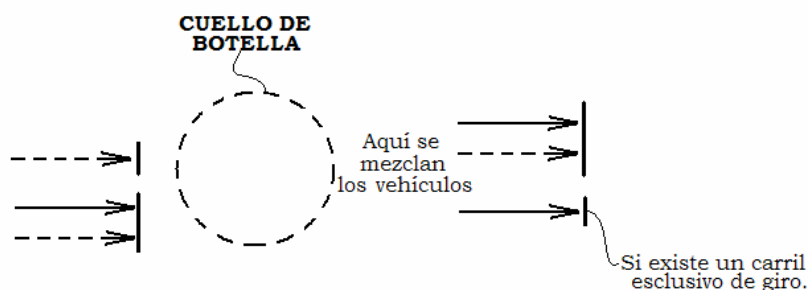




En resumen, un nodo queda como una colección de líneas de detención y cada línea de detención con uno o más arcos.



Para estrangulamientos, el fenómeno se recoge en nodos especiales llamados “cuellos de botella” el efecto buscado es imponer una restricción de capacidad y equivale a un semáforo con 100% de verde efectivo y se representa así:



En modelación de redes la capacidad de los programas computacionales se mide por la cantidad de nodos y arcos que consideran.

La forma de modelación no considera los estacionamientos claramente. En algunos programas puede existir este vacío de modelación y en dicho caso se representa con el uso de un truco introduciendo los efectos de estacionamiento mediante parámetros (capacidad, velocidad, etc.).

### Especificación de flujos:

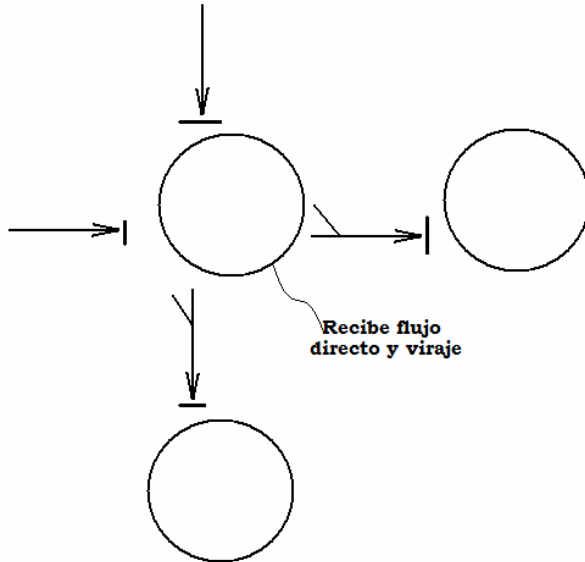
En cuanto a flujos hay dos características que interesan:

- ✓ Direccionalidad de los movimientos (Definen conexidad de la red).
- ✓ Nivel de los flujos (Magnitud).

### Direccionalidad de los movimientos

La forma de especificar las modelaciones difiere bastante entre programas.

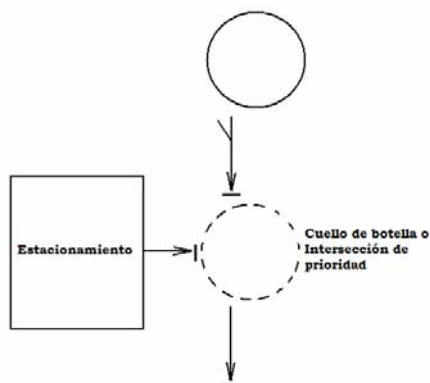
En TRANSYT, la conexidad se especifica:



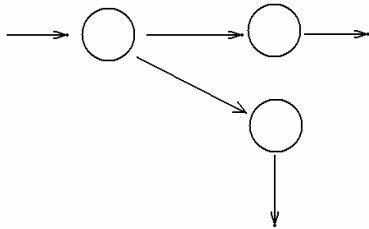
Da idea de cuales movimientos son posibles mediante la especificidad de la conexidad (su estructura) vía contribuciones con distintos arcos.

Los flujos por arco en TRANSYT son fijos (son datos). Hay un tipo particular de contribución (uniforme), al existir edificios de estacionamiento que a ciertas horas producen flujos importantes, entonces, es posible incluir estos flujos en arcos y aparecen como contribuciones en la línea de detención.

Si se requiere representar el fenómeno de vehículos que entran a un estacionamiento puede especificarse en el sitio dentro del arco correspondiente una intersección con una vía prioritaria o también una de "cuello de botella" dependiendo del fenómeno.



Si se necesita representar los flujos en modelos de asignación es conveniente dar los movimientos posibles de flujo en las intersecciones (estructura de posibilidades).



En los modelos de simulación se requiere representar la estructura real de la red.

### Nivel de los flujos

Si los flujos por arco son conocidos simplemente a cada arco de la red se le asocia el flujo que le corresponde. En particular en TRANSYT se define las contribuciones que llegan en ese arco.

En cambio en un modelo de reasignación como SATURN se especifica una matriz de origen-destino y la asignación en el proceso se realiza a la matriz.

En todos los procesos existen restricciones de capacidad, calidad de programas, recursos, etc., por lo tanto, nunca se puede modelar absolutamente con todos los detalles del caso. Se requiere hacer el trabajo de modelación con relación sensible a los efectos de un proyecto, los problemas a solucionar deben ser tratados detalladamente y otros aspectos diferentes pueden ser tratados más superficialmente.

Por ejemplo, en reprogramación de semáforos interesa que los flujos que llegan a la intersección sean los reales.

Si se tiene una percepción de los posibles efectos de un problema y se consideran en la modelación se tendrá una buena red. Es relevante en la modelación hacer bien las “preguntas” y usar adecuadamente los recursos disponibles. Si la red tiene relación con el tiempo, es posible que los impactos para un mismo proyecto sean diferentes en los periodos, es decir, que no solo cambiarían el flujo de saturación, flujo, etc., sino la estructura de arcos y nodos para cada zona especial.

Un problema que se genera al hacer una representación realista es tener que ver el fenómeno como un proceso dinámico; en la entrada de datos se procede común y corriente pero se observa que el flujo está en varios arcos sin variar lo cual no es real. Una manera de solucionarlo es incluir a través del tiempo el flujo que entra a la red pero este es un proceso que consume muchos recursos.

Una manera alternativa de tratar el problema es: Si dentro de la red existe un predominio de intersecciones semaforizadas que impone una unidad de repetición a lo largo del periodo o regularidad de la circulación permite realizar la siguiente consideración; la situación de los vehículos que entraron es homóloga a los vehículos que entraron un tiempo antes que sumadas es equivalente a seguir individualmente cada vehículo, el tiempo de simulación es una fracción del periodo. Es importante poner especial atención en los periodos pico puesto que en ellos las demoras son importantes.

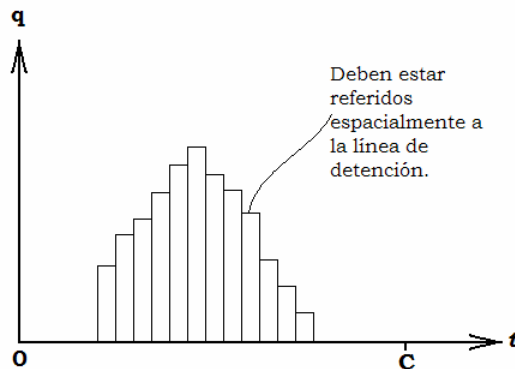
Si en la red existe un predominio de intersecciones priorizadas impone una irregularidad de la circulación y el tratamiento que se haría en el proceso de circulación en toda la red sería al final de un tratamiento conjunto muy parecido al tratamiento de cada intersección priorizada y luego sumar sus efectos, porque la red aquí como tratamiento integral no tendría sentido.

En una red urbana central generalmente las intersecciones son semaforizadas.

La técnica de reconocer las regularidades en el tiempo, localizarlas en el tiempo, localizarlas físicamente, se puede representar en los nodos que comunica a los usuarios; los flujos no solo son una cantidad promedio en el tiempo sino que se transforma en un proceso cuántico (en un verde se suelta una cantidad de vehículos y en el rojo no). Esa idea del proceso cuántico se debe a Robertson (TRRL) en su "histograma cíclico de flujo".

### *Histogramas cíclicos de flujo*

Existen tres tipos y su representación es el comportamiento de los vehículos en un ciclo.

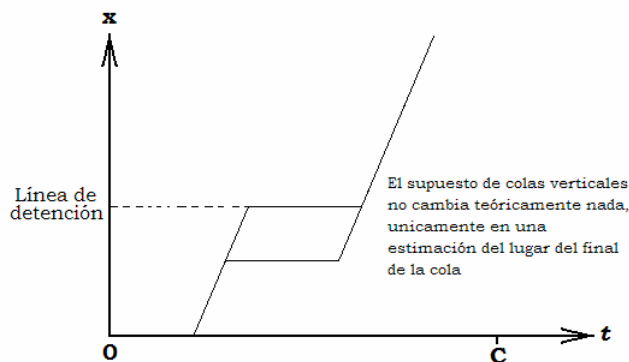


H.C.F. (Cycle Flow Profiles):

- 1) Llegadas (IN)
- 2) Salidas (OUT)
- 3) Largadas (GO)

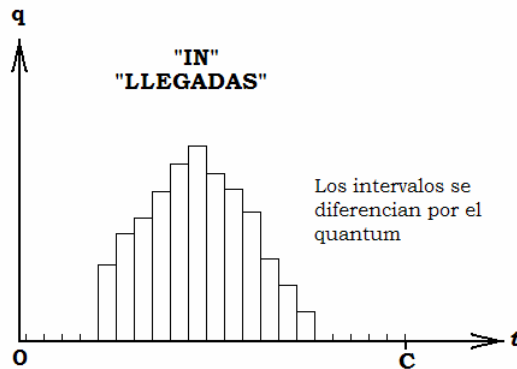
Cada línea de detención tiene un juego de tres histogramas asociados.

El fenómeno no sucede como se representa porque todos los vehículos no llegan a la línea de detención, entonces, la representación ahora es que la cola en los accesos se forma verticalmente en el punto de la línea de detención.



Histograma: Indica una distribución en el tiempo discreta o continua. Se usan límites a los intervalos porque de lo contrario la simulación se vuelve lenta, en general se usan 30 a 60 intervalos teniendo 1 o 2 s por intervalo.  $n$  = número de intervalos en un ciclo.

*Histograma de Llegadas* describe las pasadas de los vehículos por la línea de detención.

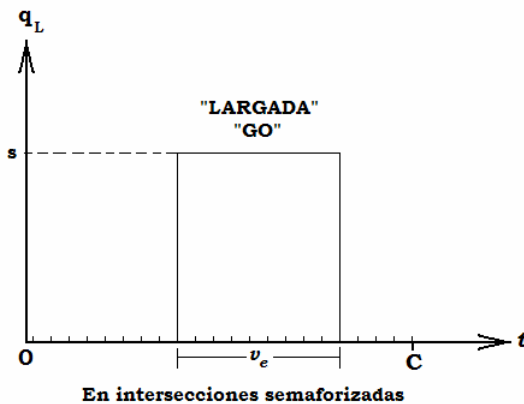


Es importante el área del histograma e importa el intervalo donde inicia la distribución introduciendo una nominalidad en el tiempo.

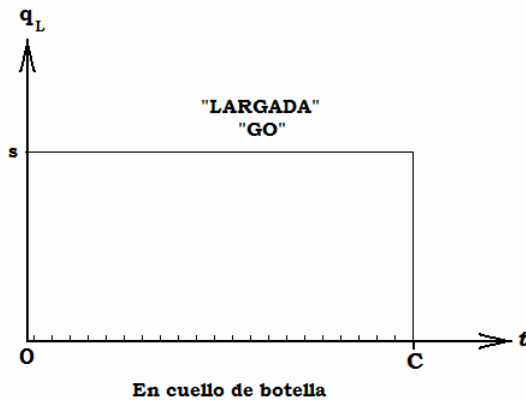
Se define un cero en el tiempo para todos los histogramas o sea el origen es común para toda la red y así poder establecer relaciones entre distintos histogramas de la red.

La línea de detención puede estar compartida por varios arcos, se tendría un histograma por cada arco y representaría como es la llegada de los vehículos de cada arco a la línea de detención, si las colas son verticales y así preservar la identidad diferenciada de los distintos tipos de vehículos que llegan por cada arco.

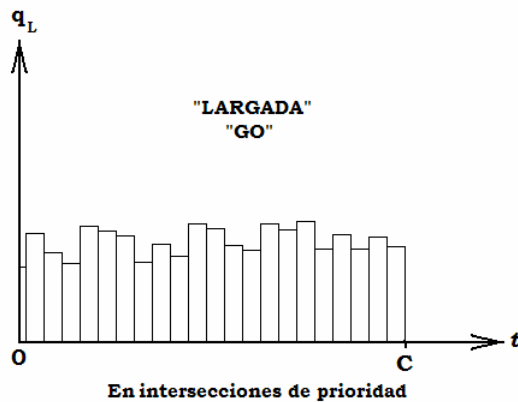
*Histograma de largada:* Define si los vehículos pueden o no salir. Especifica la salida de los vehículos en una línea de detención o sea la capacidad disponible en cada intervalo.



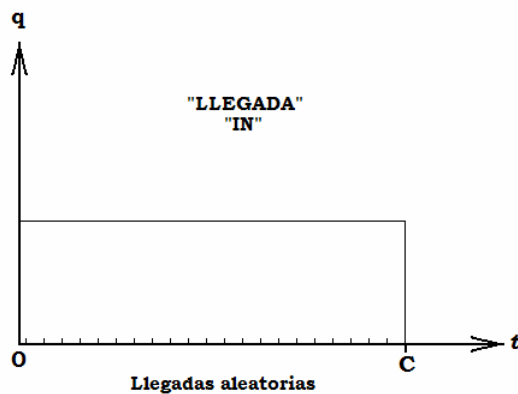
En intersecciones semaforizadas el histograma de largada es el modelo binario. En un cuello de botella el histograma sería constante y con un valor de flujo de saturación.



Si la intersección es priorizada, dentro de una red con semáforos se calcularía para cada intervalo el  $q_s$  a través, por ejemplo, de modelos lineales.



*Histograma de llegadas:* cuando son aleatorias es de un valor constante promedio de las de cada intervalo o sea que refleja una tendencia de las llegadas.



En los histogramas vistos no hay componentes aleatorias y estas son incluidas analíticamente. Solo hay un histograma de largada.

*Histograma de salidas:* Representa como sería la distribución temporal de las salidas de una línea de detención dentro de un ciclo. Depende de una combinación de los histogramas de llegada (IN) y de largada (GO).

La existencia de colas produce un rezago entre los histogramas de salidas y llegadas.

Un cuarto tipo de histograma auxiliar es el de cola para poder hablar de histograma de salidas.

Para la construcción del *histograma de colas* se comienza desde el mismo origen para llegadas en el cuello de botella o en intersecciones priorizadas y comienza al inicio del  $r_e$  en intersecciones semaforizadas.

Entonces la longitud de cola de un intervalo  $i$  es:

$$LU_i = \underbrace{q_{LL_i}}_{\text{Los que llegan}} - \underbrace{q_{L_i}}_{\text{Los que salen}} + LU_{i-1}$$

En forma general:

$$LU_{ij} = \max\{0; I(q_{LL_i} - q_{L_i}) + LU_{i-1,j}\}$$

$L$  = duración del intervalo.

Los histogramas introducen una dosis de realismo pues dejan pasar los que realmente pueden pasar y el efecto de sobresaturación sistemática y fluctuación aleatoria se tiene en cuenta por la componente analítica correspondiente. Por lo cual, en el fondo, la simulación solo recoge las colas uniformes y no las producidas por sobresaturación.

El histograma de cola uniforme (Sin sobresaturación) se estima con la formula vista sumando y restando los histogramas de llegadas (IN) y largadas (GO) por intervalos.

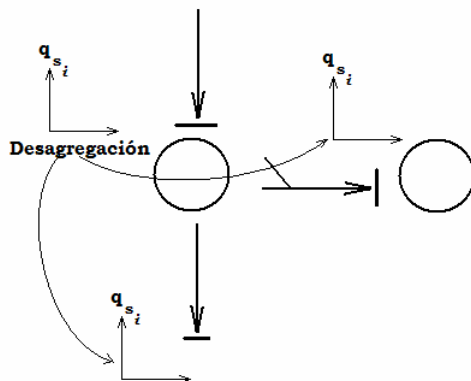
*Histogramas de salidas (OUT):* Para determinarlo en cada intervalo es:

$$q_{s_i} = \min\{q_{LL_i} + LU_{i-1}; q_{L_i}\}$$

Para que el histograma de salidas ( $q_{s_i}$ ) sea igual al de llegadas ( $q_{LL_i}$ ), entonces,  $LU_{i-1} = 0$ , para todo  $i$  y  $q_{LL_i} < q_{L_i}$ , para todo  $i$ .

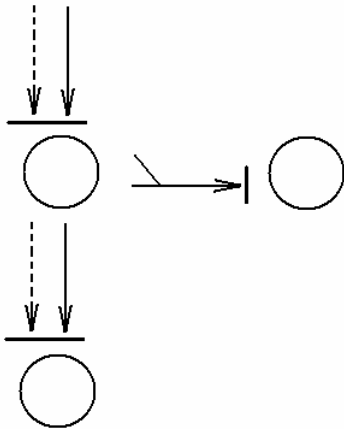
Para obtener el histograma de salidas (OUT) se necesitan el de llegadas (IN), largada (GO) y de cola.

Existe un histograma de salidas por cada línea de detención y se divide en histogramas de contribuciones a los arcos en los cuales en cada intervalo se mantiene el mismo porcentaje que tienen los diferentes movimientos y la distribución depende de la magnitud del flujo.

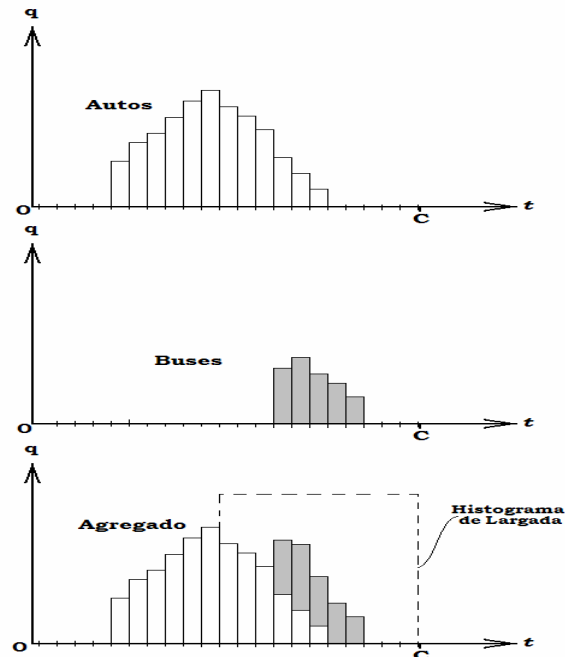


Si el caso es que llegan a una línea de detención buses y autos y en el histograma de salidas (OUT) quiere desagregarse se incluye un índice.





Se hace un histograma agregado de llegadas (IN) al arco que alimenta.



Cuando el histograma de largada (GO) se combina con el de Llegada agregado (IN), se puede conocer cuántos pueden salir y cuántos de cada tipo.

Cuando de un intervalo no pueden salir completamente los vehículos en cola los que salen deben conservar la composición de la cola, o sea, si en la cola existen 60% de autos y 40% de buses, la cola que sale debe tener la misma proporción, es decir, 60% de autos y 40% de buses pero teniendo en cuenta la cola excedente del intervalo anterior que no ha salido para darle salida primero y luego si considerar la cola del intervalo en cuestión.

Después de tener el histograma de salida agregado (OUT) se desagrega según tipo de vehículo.

La importancia del histograma de salida (OUT) es el de distinguir arcos por tipo de vehículo, y que al tener el histograma de colas determinar demoras de cierto tipo de vehículo con respecto a otro y para distintos movimientos.

Para tener en cuenta los tipos de vehículo que tiene un flujo de un arco se hace incluyendo un subíndice al flujo, así:

$q_{ij}$ , donde:  $j$  = número de arcos que comparte una línea de detención;  $i$  = tipo de vehículo.

El gran inconveniente es que en el histograma de largada (GO) en vehículos/h debería cambiar intervalo a intervalo puesto que el histograma de llegada (IN) también tiene intervalo a intervalo variación de la composición del tránsito.

Para obviar el problema se debería trabajar con ADE/h que también resulta otro gran problema dada su laboriosidad.

La *tasa media de demora*:

Se obtiene integrando el histograma auxiliar de cola uniforme.

$$DU_j = \frac{I \sum_i LU_{ij}}{n} \left[ \frac{veh}{h} \right] \quad \text{Demora uniforme por arco}$$

$I$  = duración de un intervalo (con unidades de tiempo de  $LU_i$ ).

$n$  = número de intervalos (en un ciclo).

$LU_i$  = longitud uniforme de cola en el intervalo  $i$ .

$j$  = subíndice de arcos que comparten una línea de detención.

La *tasa de detenciones uniformes*:

$$HU_j = \sum_{i \in N_1} q_{LL_{ij}} \left[ \frac{det}{h} \right]$$

Donde:

$N_1$  = Conjunto de intervalos en los que  $LU_{ij} \neq 0$ .

Falta multiplicar por  $f_D$  (factor de detención?)

Para la estimación de demoras se cuenta con toda la información suficiente para un buen nivel de detalle al conocer el histograma de colas y el trabajo que de él se parte para obtener el de salida.

Con la información obtenida se puede conocer la distribución de demoras.

La *demora excedente*

Se calcula para todos los arcos que comparten una línea de detención con los flujos de llegada a un nodo y la capacidad de él y luego se pro-ratea la demora excedente en proporción equivalente a la que tienen los flujos del arco total.

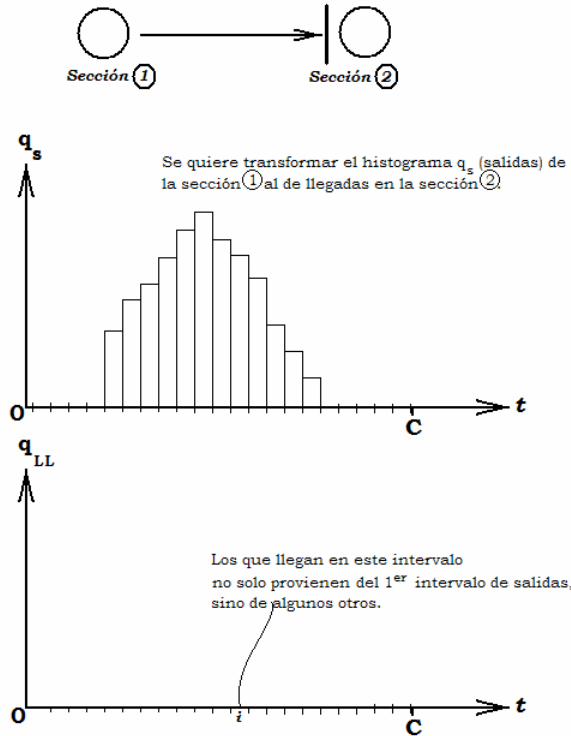
Relación de histogramas entre nodos consecutivos sobre un arco.

Los histogramas no se conservan debido a la dispersión de pelotones.

Si el grado de saturación es igual a uno el histograma de salidas (OUT) y de largada (GO) son iguales.

*Dispersión de pelotones*

Considerando que existe un tiempo para recorrer el arco y que hay un cambio de forma del pelotón debido a la diferencia de las velocidades de los vehículos que circulan por el arco, entonces, todo el problema se basa en la distribución de tiempos de viaje.



La idea es que el histograma de llegadas (IN) puede expresarse analíticamente así:

$$q_2(i) = \sum_{j=1}^i q_1(j)P(t = i - j)$$

$q_2(i)$  = flujo de llegada (IN) de los vehículos en el intervalo  $i$ .

$q_1(j)$  = Flujo de salida (OUT) del intervalo  $j$ .

$P(t=i-j)$  = Probabilidad de que un vehículo demore un tiempo  $i-j$ .

En el caso que un vehículo muy lento no llegue a la siguiente sección en el siguiente ciclo sino que se demore uno o más ciclos. Se debe determinar la probabilidad para que un vehículo se demore  $t=i-j+\epsilon n$ , donde  $\epsilon$  pertenece a los números enteros positivos y  $n$  es el número de intervalos del ciclo.

$$q_1(j+\epsilon n) = q_1(j).$$

Se considera que  $j$  varía de 1 a  $n$  y que existe un tiempo mínimo de viajes ( $T$ ).

Entonces,

$$q_2(i) = \sum_{j=i-T-n+1}^{i-T} q_1(j) \sum_{\epsilon} P(t = i - j + \epsilon n)$$

$T$  = tiempo mínimo de viaje [intervalos]

$M$  = tiempo máximo de viaje [intervalos]

Los tiempos de viaje serían:

$T, T+1, T+2, \dots, M-1, M$

Lo que hay por hacer es convertir convenientemente los límites de la sumatoria.

Límite superior =  $i-T$

Límite inferior =  $i-T-n+1$

Para  $i$ :

Límite superior = 0

Límite inferior =  $\frac{M-T+1}{n} - 1$

Para asegurar que este término  $\in \mathbb{Z}^+$  se debe cumplir para valores de  $M$  y  $T$  apropiados

$$\varepsilon = 0 \begin{cases} T \\ T+n-1 \end{cases}$$

$$\varepsilon = 1 \begin{cases} T+n \\ T+2n-1 \end{cases}$$

$\vdots$

$$\varepsilon = \varepsilon^* \begin{cases} T + \varepsilon^* \\ M = T + (\varepsilon^* + 1)n - 1 \end{cases}$$

Después de varios años de estudio de Jaime Gibson se llega a una expresión que relaciona a  $M$  y  $T$ .

$$M = T + mn + p$$

$$M - T = mn + p$$

$$M - T + 1 = mn + p + 1 \quad (+1), \quad m \in \mathbb{Z}^{+\{0\}}; \quad 0 \leq p \leq n-1$$

$$\frac{M-T+1}{n} = m + \frac{p+1}{n} \quad (\div n)$$

$$\frac{M-T+1}{n} - 1 = \varepsilon^* = m - 1 + \frac{p+1}{n} \Rightarrow m - 1 \leq \varepsilon^* \leq m$$

$$m = \text{INT} \left[ \frac{M-T}{n} \right], \quad p = M - T - mn$$

$$\Rightarrow \text{límite superior} = m - 1$$

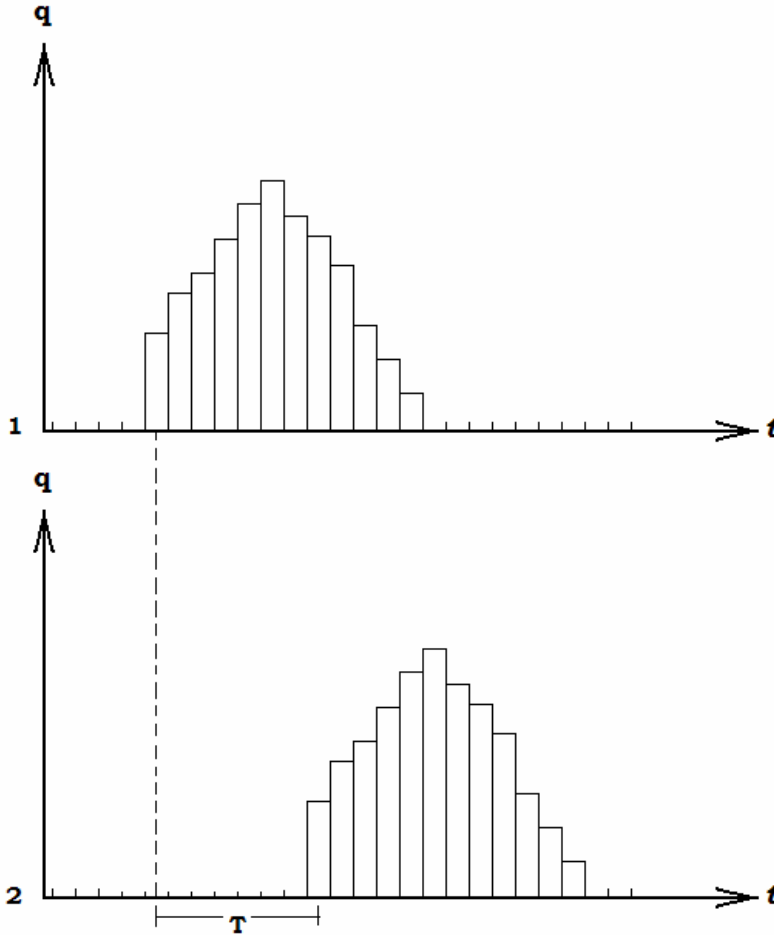
Para obtener  $q_2(i)$  basta conocer la distribución de tiempos de viaje y por ende las probabilidades.

Se ha concluido que no es importante el cambio de resultados con el uso de diferentes distribuciones.

$$P(t = i - j + \varepsilon n) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < T \\ \text{Distribución geométrica} \\ \frac{\overbrace{F(1-F)^{t-T}}^{\text{Distribución geométrica}}}{\underbrace{1 - (1-F)^{M-T+1}}_{\text{Número fijo}}}, & \text{si } T \leq t \leq M, \text{ Distribución cuasi-geométrica} \\ 0, & \text{si } t > M \end{cases}$$

Donde  $F$  es un parámetro entre 0 y 1.

$$q_2(i+T) = \frac{F[q_1(i) - (1-F)^{mn+p+1}q_1(i-p-1)]}{1 - (1-F)^{mn+p+1}} + (1-F)q_2(i+t-1)$$



$$0 \leq p \leq n-1$$

Suponiendo  $p = n-1$

$$q_1(i-p-1) = f_1(i-n+1-1) = f_1(i-n) = f_1(i)$$

Con este supuesto se llega a:

$$q_2(i+T) = Fq_1(i) + (1-F)q_2(i+T-1), \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (1)$$

En este supuesto se simplificó la expresión y desapareció el parámetro M o sea, que queda solo con los parámetros F y T.

Esta expresión siempre ha quedado como el modelo de dispersión en TRANSYT de Robertson. El con sus datos calibró la expresión y llegó a:

$$F = \frac{1}{1 + KT}$$

Esta fue utilizada porque era funcional pero sin un análisis previo de la distribución de tiempos de viaje.

El supuesto  $p=n-1$  lleva consigo:

$$M = T + mn + p = T + (m+1)n - 1$$

Aquí m puede tomar valores para formar una familia para M.

$T+n-1$ ,  $T+2n-1$ ,  $T+3n-1$ , donde  $T+n-1$  es el tiempo de viaje que soporta.

Aquí implícitamente se está admitiendo tiempos de viaje demasiado altos que no pesan tanto pues tienen una probabilidad muy baja en la distribución aunque no es discutible.

El problema siguiente es el de donde sacar F. En el campo se suele conocer la velocidad media ( $\bar{v}$ ) y por ende el  $\bar{t}$ , como F es el parámetro de la media de la distribución de tiempos se relaciona  $\bar{t}$  con F.

$$\bar{t} = \sum_{k=T}^M kp(k)$$

Donde  $p(k)$  es la distribución "cuasi geométrica" que luego de un tratamiento algebraico se llega a:

$$\bar{t} = T - 1 + \frac{1}{F} - \frac{M - T + 1}{(1 - F)^{-(M-T+1)} - 1}$$

Expresión que se puede describir de esta otra manera:

$$F = \frac{1}{1 + \bar{t} - T + \frac{M - T + 1}{(1 - F)^{-(M-T+1)} - 1}}$$

Y si se impone el supuesto  $p = n-1$ , entonces,  $M - T + 1 = (m + 1)n$ , el problema de cálculo de F es que en la expresión también aparece un término de F que es un polinomio de grado mayor que 4, entonces, debe resolverse con métodos numéricos.

Con la expresión para F se tiene inconsistencia por falta de soporte de k y porque se incluye el parámetro que ya había desaparecido.

Si se tienen dos histogramas puede determinarse el tiempo medio de viaje entre ellos.

Si se tienen dos secciones en la vía:

$$t_{1-2} = \overbrace{t_{i2}}^{\text{Tiempo de paso por la sección 2}} - \overbrace{t_{i1}}^{\text{Tiempo de paso por la sección 1}}$$

$$\bar{t}_{1-2} = \frac{\sum_{i=1}^N (t_{i1} - t_{i2})}{N} = \frac{\sum t_{i2}}{N} - \frac{\sum t_{i1}}{N}$$

Así en dos histogramas se encuentra el intervalo promedio ponderado con los flujos en cada uno y la diferencia es el tiempo medio de viaje.  $T = \beta \bar{t}$

Al suponer un  $\bar{t}$ , calculo el parámetro T y F y luego el histograma  $q_2(i+T)$ . Con el histograma  $q_1()$  que se tiene se puede hacer la prueba de encontrar el  $\bar{t}$  y compararlo con el supuesto y sería de esperar que fueran iguales pero ha resultado de acuerdo a la expresión para F distintos.

Una solución que no es perfectamente consistente pero si como resultado de un juego consciente es tomar junto con el modelo de distribución la siguiente expresión de F:

$$F = \frac{1}{1 + \bar{t} - T} \quad (2)$$

F está entre 0 y 1 y además subestima el  $\bar{t}$ .

Si  $F=1$ , entonces,  $q_2(i+T) = q_1(i)$ , los histogramas están desplazados en T, o sea, no hay dispersión.

Si  $F=0$ , entonces,  $q_2(i+T) = q_2(i+T-1)$ , los histogramas son uniformes, o sea, total dispersión.

F puede interpretarse como un grado de dispersión de los pelotones.

Hay otros problemas que son: Para el primer intervalo se impone la conservación de flujo, o sea, que de histograma a histograma el área se conserve.

De aquí se desarrolla un trabajo algebraico que concluye en la siguiente expresión:

$$q_2(1+T) = \frac{F}{1-(1-F)^n} \sum_{j=2}^{n+1} q_1(j)(1-F)^{n+1-j} \quad (3)$$

Se usa esta expresión para  $i = 1$  y esta el valor para la predicción del segundo intervalo en la expresión recursiva (1).

El otro problema es encontrar un valor de  $T$ , pero Robertson obtuvo la siguiente expresión:

$$T = INT[\beta \bar{t} + 0.5] \quad (4)$$

Si se tienen arcos de buses (Pueden existir paraderos, entonces, se dan otros efectos).

$$T = INT[\gamma b + \sigma \bar{t}_r + 0.5]$$

Es una formula empírica.

$b$  = tiempo medio de parada.

$t_r$  = tiempo medio de movimiento.

$$\bar{t}_{bus} = b + \bar{t}_r$$

$\gamma, \sigma$  = coeficientes.

Los ingleses utilizan valores de  $\beta = 0.8$ ;  $\gamma = 0.3$  y  $\sigma = 0.85$ .

En TRANSYT estos parámetros están incorporados, o sea, no son datos de entrada.

Con lo visto hasta ahora se puede hallar el histograma de llegada con el de salida cerrándose el ciclo. La variable pivote es el tiempo medio de viaje ( $\bar{t}$ ).

Si hay cambios de velocidad, entonces, hay cambios en tiempos de viaje, variación de demoras y detenciones en el nodo siguiente.

La dispersión no es transitiva pero la diferencia es relativamente pequeña, no hay solución que incorpore efectos de no-transitividad.

Para iniciar todo el proceso se hace un supuesto en los arcos de entrada a la red que es que se tiene un histograma uniforme ayudado de un proceso iterativo de tal forma que se establezca los histogramas para que no se dependa de los iniciales.

Otro detalle es si un arco tiene tres contribución con histogramas de llegada TRANSYT los dispersa y en el de salida los agrega. Esto permite dentro del arco tipos de diferenciación por tiempos medios de viaje, esto hace que el comportamiento sea más realista pero no para diferenciar demoras y detenciones porque se necesitaría que fueran en arcos diferentes.

Las demoras y detenciones no solo dependen de la magnitud del verde efectivo, sino de la posición de él en el tiempo.

### Obtención del tiempo medio de viaje ( $\bar{t}$ )

Se puede obtener básicamente de tres fuentes:

- 1) De la "manga": Es decir se toma un valor arbitrario de imaginación.
- 2) De la medición: Esto no es siempre fácil puesto que no siempre se tienen condiciones de movimiento libres o son para condiciones ambientales que no se conservan.
- 3) De un modelo de predicción: Puede ser de la relación velocidad-flujo.

En el contexto de redes urbanas interesa  $\bar{t}$  para definir trayectorias espacio-tiempo.

La velocidad de viaje es función del flujo en el que se mueva el vehículo, o sea, de la interrelación que se presenta entre los vehículos. Y debe recogerse en condiciones libres de intersección y de cuellos de botella.

Para cierto valor de la velocidad se invierte la relación de velocidad-flujo puesto que el usuario elige otra ruta, pero este fenómeno no es relevante en los arcos y si en la red.

La relación velocidad-flujo también depende de las características de la vía y la heterogeneidad de usuarios.

En redes urbanas la circulación en los arcos es en grupos o pelotones así la interacción se da entre ellos no con el vehículo previo. Las intensidades de flujo son, por esto, mayores que las promedio porque en estas se agregan intervalos donde no circula nadie. La unidad adecuada de análisis sería, por lo tanto, el pelotón. Los datos elementales para estimar la relación es  $\bar{t}$  y el flujo del pelotón.

Se estima una relación  $\bar{t}$ -flujo del pelotón y luego se busca una relación  $\bar{t}$ -flujo en periodos más largos (15') lo cual es una transformación desagregada y así se usa para predecir.

$$t = t_0, q \leq q_1$$

$$t = t_0 + \lambda(q - q_1), q \geq q_1$$

$q_1$  = flujo por pelotón [número de vehículos/pelotón]

$t$  = tiempo medio por pelotón.

Para pasar a flujos agregados:

La forma analítica para la relación agregada puede ser:

$$t = t_0, \quad q \leq q_0$$

$$t = \frac{t_0}{1 - \underbrace{\beta(q - q_0)}_{\text{Hiperbólica}}}, \quad q_0 \leq q \leq q_c$$

$$t = t_c + \alpha(q - q_c), \quad q > q_c$$

Si se quiere transformar la relación  $\bar{t}$ -flujo a la de velocidad-flujo se obtiene:

$$\frac{L}{t} = \frac{L}{t_0} = v = v_0, \quad q \leq q_0$$

$$v = v_0 - \overbrace{\beta v_0}^b (q - q_0), \quad q_0 \leq q \leq q_c$$

$$v = \frac{v_c}{1 + \frac{\alpha v_c}{L} (q - q_c)}, \quad q > q_c$$

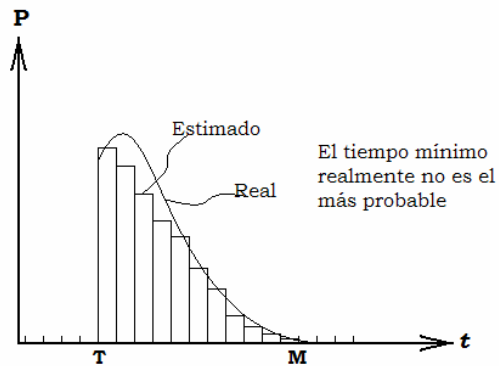
$q_0, q_c$  : Dependen de la vía que se trate igual que  $v_0$  y  $b$  que se suponen conocidos.

$L$  = longitud del tramo (arco).

Dado el flujo se puede calcular el  $\bar{t}$  en el tramo.

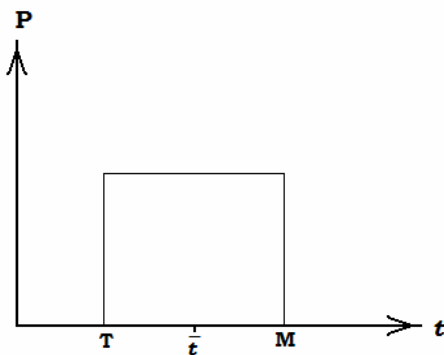
La distribución de tiempos es:





La calibración consiste en dados dos histogramas encontrar el T que produzca el mejor ajuste entre  $\bar{t}_{calculado}$  y  $\bar{t}_{asumido}$ .

Un polaco halló un modelo de dispersión uniforme que tiene ventajas en tiempos computacionales (Que ahora no representa problema).



Continuando con el tratamiento de la relación velocidad-flujo suspendido antes de las preguntas anteriores:

Cuando los flujos de los arcos no son fijos, no es fácil el uso de las relaciones velocidad-flujo, entonces, se trabaja con una sola forma en todo el dominio esto se presenta en los modelos de asignación. En este caso ni  $\bar{t}$ , ni q son datos.

En el tema de *estacionamientos* se han definido relaciones como:

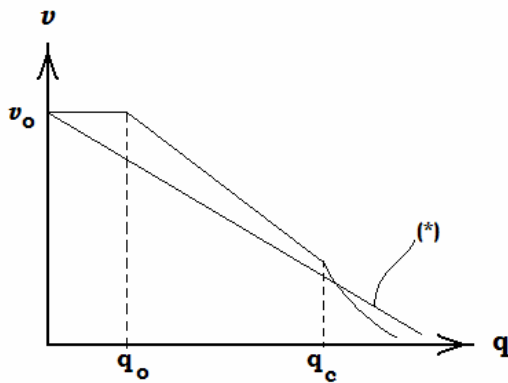
$$v = \alpha - \frac{\beta}{w-a} - \gamma \frac{q}{w-a} \quad (*)$$

w = anchura de la calzada.

a = reducción de la anchura efectiva por estacionamiento.

a = a(l<sub>c</sub>)

$$I_c = \frac{N^{\circ} \text{vehículos estacionados}}{\text{km}} = \text{Indice de estacionamiento} = \xi$$



$v_0$  relacionado con  $\alpha - \frac{\beta}{w-a}$  (Función del efecto de estacionamiento)

$b$  relacionado con  $\frac{\gamma}{w-a}$

Para integrar esta relación con los parámetros de vía puede asociarse con valores de  $\alpha$  y  $\beta$   
Respecto a los *paraderos* puede hacerse una relación similar a lo anterior porque algunos paraderos tienen efectos similares a los estacionamientos pero existen fenómenos más complejos lo que no permite una relación buena, entonces, el procedimiento más al alcance es medir  $\bar{t}$ .

### 3. GIRO A LA IZQUIERDA

#### 3.1 DISTRIBUCIÓN DE POISSON<sup>7</sup>

La distribución de Poisson se utiliza para describir cierto tipo de procesos, entre los que se encuentran la distribución de llamadas telefónicas que llegan a un conmutador, la demanda (necesidades) de los pacientes que requieren servicio en una institución de salud, las llegadas de camiones a una caseta de cobro, el número de accidentes registrados en una cierta intersección de calles y por su puesto la aplicación que le daremos en este trabajo; bahía de giro a la izquierda. Estos ejemplos tienen en común un elemento: pueden ser descritos mediante una variable aleatoria discreta que toma valores enteros (0, 1, 2...).

Características de los procesos que producen una distribución de probabilidad de Poisson.

1. El promedio (la media) del número de eventos que se producen por hora, puede estimarse a partir de datos que se tengan disponibles.
2. Si dividimos la hora pico en periodos (intervalos) de un segundo cada uno, encontraremos que las siguientes afirmaciones son verdaderas:
  - ✓ La probabilidad de que exactamente un evento ocurra por segundo es muy pequeña y es constante para cada intervalo de un segundo.
  - ✓ La probabilidad de que dos o más eventos ocurran en un intervalo de un segundo es tan pequeña que le podemos asignar un valor cero.
  - ✓ El número de eventos que ocurren en un intervalo de un segundo es independiente del tiempo en que dicho intervalo se presente en la hora pico.
  - ✓ El número de eventos en un intervalo de un segundo no depende del número de ocurrencias en cualquier otro intervalo de un segundo.

Cálculo de la probabilidad de Poisson.

La letra X por lo general representa a una variable discreta y puede tomar valores enteros. Utilizamos la letra X para representar a la variable aleatoria y la letra x para señalar un valor específico que esta variable pueda tomar. La probabilidad de tener exactamente x presentaciones en una distribución de Poisson se calcula con la fórmula:

$$P(x) = \frac{(\lambda^x)(e^{-\lambda})}{x!}$$

Donde:

$P(x)$  = Probabilidad de tener exactamente x representaciones

$x!$  = x factorial

---

<sup>7</sup> Apuntes de clase del autor. Especialización en Vías y Transporte. Profesor Sergio García

$\lambda^x = \lambda$  (numero medio de representaciones por intervalo de tiempo) elevada a la x potencia

$e^{-x}$  = Base de los logaritmos neperianos o naturales, elevada a la lambda potencia negativa.

A continuación se describirá el modelo matemático para la elaboración de una bahía de giro a la izquierda en una intersección semaforizada:

$$m = \frac{q * t}{3600}$$

Donde:

q = Volumen que gira a la izquierda (Veh/h)

t = Tiempo de acumulación de vehículos (seg.)

m = Promedio de vehículos que llegan en un tiempo t

$$\sum_{x=0}^k P(0) \geq A$$

Donde:

K = capacidad del refugio (Veh)

A = probabilidad de buena operación. (%)

Dimensiones de la bahía:

$$Lt = \frac{V}{3.6} * TPR + \frac{V^2}{254(fl \pm p)}$$

Donde:

Lt = Distancia de recorrido durante el TPR (tiempo, percepción, reacción y distancia de frenado) (m)

V = Velocidad de aproximación. (Km./h)

fl = Factor por tipo de superficie. (Adimensional)

p = Pendiente. (%)

La = Longitud de acumulación = K \* 6.5m (Longitud estándar de un vehiculo)

Lr = La + Lt

## 4. MODELACIÓN DE REDES

La Modelación de redes cuenta con cuatro etapas: Generación, Distribución zonal, Distribución modal y Asignación.

### 4.1 MODELO LINEAL<sup>8</sup>

Tipo: Generación

Formulación general.

$$G_i^n / A_i^n = k + \sum a_i V_i^n$$

$$G_i^n / A_i^n = k \prod (V_i^n)^{\alpha_i}$$

$G_i^n / A_i^n$  = Viajes generados/atraídos por la zona i, para el motivo n.

$V_i^n$  = Variables explicativas a introducir según motivos n.

k,  $a_i$ ,  $\alpha_i$  = Parámetros a ajustar.

Se ajustan por regresión lineal múltiple.

Variables explicativas:

Trabajo	Generación	Atracción
	Población	Empleo
	Población activa	Empleo por sectores
	Población de una cierta edad	
Estudios	Población de un cierto estrato de edad	Puestos escolares
		Puestos universitarios
Compras	Población	Empleos en comercios
	Nivel de renta	Dotaciones comerciales
Otros	Población	Camas hospitalarias
	Nivel de renta	Dotaciones no comerciales
		Empleo

Si los viajes generados y atraídos se refieren a un único modo, vehículo privado, el nivel de motorización (parque) por zonas, también es una variable básica a introducir.

Asimismo, en el análisis, se puede diferenciar, en algún caso, entre viajes de familias propietarias de coche y de familias no propietarias de coche.

<sup>8</sup> Curso sobre tráfico urbano. Modelos de transporte. José Luís Maldonado Inocencio. Febrero de 1992

## 4.2 MODELO DE OPORTUNIDAD<sup>9</sup>

Tipo: Distribución Zonal

Modelo de distribución espacial de la demanda. Usado básicamente para explicar los viajes recurrentes y habituales.

El modelo presupone que el comportamiento de los viajeros de la aglomeración es tal que todo viajero procedente de  $i$  termina su viaje en  $j$ , siempre que no haya encontrado un destino aceptable en una zona más conveniente para él que la  $j$  (el sentido de conveniencia puede referirse a mayor proximidad geográfica, menor tiempo de viaje, o menor coste generalizado de transporte).

De acuerdo con la hipótesis anterior, si  $A_j$  es el número total de destino ofrecido por la zona  $j$ , habrá que definir una función  $f_i(A_j)$  para cada zona de origen que nos dé la probabilidad de que en  $j$  haya un destino aceptable para  $i$ ; una vez definida esta función, si el número total de destinos existentes en las zonas más próximas a  $i$  que  $j$  es  $A_T$ , llamando  $T$  a la zona total que engloba dichas zonas, la probabilidad de que un viaje con origen en  $i$  acabe en  $j$  será el producto:

(Probabilidad de que no haya destino aceptable en  $T$ ) x (Probabilidad de que haya destino aceptable en  $j$ ) =  $(1 - f_i(A_T)) \times f_i(A_j)$ .

La función  $f_i$  adoptada por el modelo de oportunidad es:

$$f_i(A) = 1 - e^{-L_i \cdot A}$$

Obteniéndose como valor de  $N_{ij}$  el siguiente:

$$N_{ij} = G_i \cdot e^{-L_i \cdot A_T} \cdot (1 - e^{-L_i \cdot A_j})$$

Teniendo  $G_i$  y  $A_j$  el mismo significado que en el modelo gravitacional y siendo  $A_T$  la totalidad de viajes atraídos por las zonas más interesantes para  $i$  que la  $j$ .

---

<sup>9</sup> Curso sobre tráfico urbano. Modelos de transporte. José Luís Maldonado Inocencio. Febrero de 1992.

### 4.3 MÉTODO DE FACTORES DE CRECIMIENTO<sup>10</sup>

Tipo: Distribución Zonal

Modelo de distribución espacial de la demanda. Usado básicamente para explicar los viajes recurrentes y habituales.

No es un modelo propiamente dicho, pues no explica el reparto espacial de viajes, sino que básicamente extrapola los flujos actuales en función del crecimiento de la población y la actividad económica en las zonas.

$$N_{ij}^1 = F_{ij} N_{ij}^0$$

Fórmula general

$N_{ij}^0$  = Viajes entre i y j en el año 0.

$N_{ij}^1$  = Viajes entre i y j en el año 1.

$F_{ij}$  = Factor de crecimiento en la relación i-j.

El factor de crecimiento puede ser:

1) Constante para todas las relaciones y zonas.

$$N_{ij}^1 = F N_{ij}^0$$

2) Se tienen factores de crecimiento diferentes por zonas  $F_i$

a) Media aritmética a nivel de relación.

$$N_{ij}^1 = \frac{F_i + F_j}{2} N_{ij}^0$$

b) Media geométrica (Método Detroit).

$$N_{ij}^1 = \frac{F_i \cdot F_j}{F} N_{ij}^0$$

$F$  factor de crecimiento global de la aglomeración.

c) Método Fratar.

$$N_{ij}^1 = N_{ij}^0 F_i \cdot F_j \frac{\sum_j N_{ij}^0}{\sum_j N_{ij}^0 \cdot F_j}$$

Para garantizar las condiciones de borde;

$$A_j^1 = \sum_i N_{ij}^1 = F_j \cdot A_j^0 = F_j \sum_i N_{ij}^0$$

$$G_i^1 = \sum_j N_{ij}^1 = F_i \cdot G_i^0 = F_i \sum_j N_{ij}^0$$

<sup>10</sup> Curso sobre tráfico urbano. Modelos de transporte. José Luís Maldonado Inocencio. Febrero de 1992.

---

El método se aplica de forma iterativa, utilizando aplicaciones informáticas.

El método es simplista (no es en realidad un modelo explicativo), pues no tiene en cuenta las modificaciones que se producen entre los instantes 0 y 1 en:

- a) Estructura de la aglomeración.
- b) Redes de transporte.
- c) Comportamiento de los usuarios.
- d) Fronteras entre zonas.

Da buenos resultados para prognosis a corto plazo, siempre que la aglomeración evolucione poco.



#### 4.4 MODELO TIPO PROBIT<sup>11</sup>

Tipo: Distribución modal

Estos modelos se basan en considerar el valor del tiempo de viaje como una variable estadística con una determinada función de distribución. Frecuentemente, se acepta que esta variable sigue una ley logarítmico-normal de media  $\mu$  y desviación típica  $\sigma$ . Calculando los valores límites del tiempo que igualan los costes generalizados de los diferentes modos en competencia y conociendo el valor de  $\mu$  y de  $\sigma$ , se obtienen, a través de la citada función, las participaciones de los diferentes modos en la demanda de transporte de que se trate. En efecto, sean  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  los costes de transporte en los modos 1, 2 y 3, respectivamente (si se consideran tres modos de transporte, aunque el método es generalizable), y  $t_1$ ,  $t_2$  y  $t_3$  los tiempos de viaje en dichos modos. Supongamos que sea  $C_1 < C_2 < C_3$  y  $t_1 > t_2 > t_3$ .

Los valores límites del tiempo serán:

Entre el modo 1 y el 2

$$C_1 + p_{1,2} t_1 = C_2 + p_{1,2} t_2$$

de donde

$$p_{1,2} = (C_2 - C_1) / (t_1 - t_2)$$

Análogamente, entre el modo 2 y 3, el valor límite del tiempo  $p_{2,3}$  será:

$$p_{2,3} = (C_3 - C_2) / (t_2 - t_3)$$

La demanda para la que el valor del tiempo sea inferior a  $p_{1,2}$  utilizará el modo 1, la que tenga su valor entre  $p_{1,2}$  y  $p_{2,3}$  utilizará el modo 2 y la que tenga un valor superior a  $p_{2,3}$  empleará el modo 3. En consecuencia, las participaciones  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  serán:

$$p_1 = \int_{-\infty}^{p_{1,2}} f(x)dx \quad p_2 = \int_{p_{1,2}}^{p_{2,3}} f(x)dx \quad p_3 = \int_{p_{2,3}}^{\infty} f(x)dx$$

en donde  $f(x)$  es la función de densidad del valor del tiempo  $z$ . Si se acepta la distribución logarítmico-normal, una transformación de variables y el uso de las tablas  $N(0,1)$  permiten efectuar el ajuste en la fase de reglaje del modelo y obtener las participaciones  $p_i$  en la fase de pronóstico.

<sup>11</sup> Curso sobre tráfico urbano. Modelos de transporte. José Luís Maldonado Inocencio. Febrero de 1992

#### 4.5 MODELO DE UTILIDAD<sup>12</sup>

Tipo: Distribución modal

En ellos se parte de que la utilidad del transporte  $U_{m,ij}$  entre  $i,j$  en el modo  $m$  es:

$$U_{m,ij} = C_{m,ij}^{am} \cdot t_{m,ij}^{bm} \cdot e^{dm}$$

Con

$$T_{m,ij} = S_{m,ij} \times T_{ij}$$

Y

$$S_{m,ij} = U_{m,ij} / U_{ij}$$

Teniendo las  $C_{m,ij}$ ,  $t_{m,ij}$ ,  $T_{m,ij}$  y  $T_{ij}$  los mismos significados que en el caso anterior y siendo  $S_{m,ij}$  la participación del modo  $m$ , en tanto por uno, en la demanda total  $T_{ij}$  y  $U_{ij} = \sum U_{m,ij}$  la utilidad total.

El ajuste, como en el caso anterior, consistirá en obtener los valores de  $a_m$ ,  $b_m$ ,  $d_m$  de modo que las diferencias entre los valores observados y los estimados sea mínima.

En estudios de redes viarias, tanto urbanas como interurbanas, no integradas en estudios integrales de transporte, se suele estudiar específicamente la movilidad en vehículo privado, eliminando modelos de reparto modal.

#### 4.6 MODELO DE ELASTICIDAD

Tipo: Distribución modal

Estos modelos tienen una expresión matemática del tipo:

$$t_{m,ij} = T_{ij} C_{1,ij}^{a_{m,1}} \cdot C_{2,ij}^{a_{m,2}} \cdot C_{3,ij}^{a_{m,3}} \cdot t_{1,ij}^{b_{m,1}} \cdot t_{2,ij}^{b_{m,2}} \cdot t_{3,ij}^{b_{m,3}}$$

En donde:

$T_{m,ij}$  = demanda total de viaje en el modo  $m$ , para la relación  $i,j$ .

$T_{ij}$  = demanda de viaje entre  $i,j$  en todos los modos.

$C_{1,ij}$ ,  $C_{2,ij}$ ,  $C_{3,ij}$  = costes de viajes entre  $ij$ , en los modos 1, 2 y 3, respectivamente.

$t_{1,ij}$ ,  $t_{2,ij}$ ,  $t_{3,ij}$  = tiempos de viaje entre  $ij$ , en los modos 1, 2 y 3, respectivamente.

$a_{m,n}$  = elasticidades de la demanda del modo  $m$  respecto al coste del modo  $n$ .

$b_{m,n}$  = elasticidades de la demanda del modo  $m$  respecto al tiempo de transporte en el modo  $n$ .

El ajuste del modelo consiste en estimar los valores de dichas elasticidades.

<sup>12</sup> Curso sobre tráfico urbano. Modelos de transporte. José Luís Maldonado Inocencio. Febrero de 1992

#### 4.7 MODELO GRAVITACIONAL<sup>13</sup>

Tipo: Asignación

Para llevar a cabo la distribución de los viajes se utiliza el modelo gravitatorio, el cual supone que el número de viajes entre una zona  $i$  y un destino  $j$  es proporcional al número de viajes producidos en la zona  $i$ , al número de viajes atraídos por la zona  $j$  y a una función de impedancia o de costos relativa a las zonas. Esta función de costos está relacionada con variables tales como: el tiempo de viaje, la distancia, el costo de viaje, etc. El modelo gravitatorio está representado mediante la Ecuación (4.7.1).

$$V_{ij} = c P_i A_j f(c_{ij}) = \frac{P_i A_j f(c_{ij})}{\sum A_j f(c_{ij})} \quad (4.7.1)$$

Donde,

$V_{ij}$ : Viajes entre un origen  $i$  y un destino  $j$

$P_i$ : Total de viajes producidos en el origen  $i$

$A_j$ : Total de viajes atraídos en el destino  $j$

$f(c_{ij})$ : Factor de fricción del viaje entre  $i$  y  $j$

$c$ : es una constante de proporcionalidad

Por lo que las funciones de impedancia pueden ser de los siguientes tipos: exponencial (ecuación 4.7.2), potencial inversa (ecuación 4.7.3), gamma (ecuación 4.7.4) o funciones discretas.

$$f(c_{ij}) = e^{-c(c_{ij})} \quad c > 0 \quad (4.7.2)$$

$$f(c_{ij}) = c_{ij}^{-b} \quad b > 0 \quad (4.7.3)$$

$$f(c_{ij}) = a c_{ij}^{-b} e^{-c(c_{ij})} \quad a > 0, \quad c > 0 \quad (4.7.4)$$

#### Información Necesaria para la Calibración del Modelo

Esta información se obtiene utilizando los datos del año base y siguiendo los pasos siguientes:

- Separar los viajes Basados en el Hogar (HB) de los viajes No Basados en el Hogar (NHB), por motivo y modo de transporte utilizado;
- Obtener las matrices de viajes y de costos utilizando la información de las encuestas OD para cada uno de las clasificaciones efectuadas anteriormente. Dentro de estas matrices no se incluyen los viajes de regreso a casa.

#### Calibración del Modelo Gravitatorio

Una vez obtenida la información para el año base se procede a la calibración del modelo mediante el siguiente procedimiento:

<sup>13</sup> IV Congreso de Ingeniería del Transporte. Valencia - CIT2000. Modelación de la Distribución de Viajes en Ciudades Intermedias Colombianas. Elkin R. Ruiz Rincón. Iván Sarmiento Ordosgoitia

- a) Elaborar las gráficas de las frecuencias de los costos medios para cada clasificación de viajes efectuada (en este caso urbano se utilizó el tiempo de viaje) con el fin de tener una idea inicial del tipo de función de impedancia (gamma, exponencial, exponencial inversa, función discreta) que puede ajustarse a la distribución de costos para dicha clasificación.
- b) Utilizando las matrices de viajes y de costos medios (tiempos medios) para el año base y la posible función de impedancia, se efectúan las iteraciones necesarias para obtener los coeficientes de calibración de la función de impedancia. En muchos casos el modelo no converge y por tanto, se hace necesario utilizar las funciones discretas, las cuales tienen una convergencia rápida. En estas se definen intervalos de costos (tiempos) y se obtiene una frecuencia de viajes para cada uno de ellos.

### Evaluación del Modelo

Una vez calibrado el modelo se puede evaluar en condiciones futuras, para lo cual se requiere de los siguientes pasos:

- a) Obtener las producciones y atracciones para el año horizonte de planificación en cada una de las zonas definidas con los modelos de generación previamente calibrados
- b) Calcular las matrices de costos medios (tiempos medios) para el año horizonte.
- c) Efectuar la distribución de los viajes con la Ecuación (4.7.1) para obtener la matriz de los viajes futuros utilizando la función de impedancias (continua o discreta) obtenida de la calibración.
- d) Obtener la matriz de viajes HB, sumando las matrices distribuidas de cada una de las clasificaciones realizadas para los viajes que son HB. Luego se obtiene la transpuesta de los viajes HB, la cual corresponde a los viajes de regreso a casa, dado que éstos son aproximadamente el 45% de los viajes producidos por el hogar. Una vez obtenidos los viajes de regreso a casa se suman con las matrices de viajes HB.
- e) Para obtener la matriz de viajes totales se suma la matriz de viajes HB obtenida en el paso anterior con la matriz NHB (suma de las matrices NHB).

#### 4.8 MODELO DE LA PSEUDO-CONVECCIÓN - DIFUSIÓN<sup>14</sup>

Tipo: Asignación

Modelización del Tráfico Urbano Mediante Teorías del Continuo

CONCEPTOS BÁSICOS DEL FLUJO DE TRÁFICO. MODELO DE LA PSEUDO-CONVECCIÓN-DIFUSIÓN

Lighthill y Whitham (1955) formularon un modelo continuo para el flujo de tráfico partiendo únicamente de una ecuación de conservación, que en un espacio mono-dimensional sería de la forma:

$$\frac{\partial K(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = \theta(x, t) \quad (4.8.1)$$

Donde  $K(x, t)$  representa la densidad o concentración de tráfico,  $Q(x, t)$ , el flujo neto de vehículos, y  $\theta(x, t)$  la función de generación de vehículos.

Este modelo, el Modelo Simple, es claramente muy limitado, ya que no permite fluctuaciones de la velocidad respecto a los valores de equilibrio, y permite la aparición de ondas de choque, que suponen cambios instantáneos de la velocidad.

El modelo más usado ha sido el de Payne (1971), que introducía una nueva ecuación, siendo la velocidad una incógnita más. Sin embargo, en las situaciones reales, en las que el tiempo de variación de las condiciones de tráfico es mucho mayor que el requerido para que un conductor alcance la velocidad que desea, las diferencias existentes entre los resultados que aporta el modelo de Payne y los que proporciona el Modelo Simple son mínimas (Del Castillo, 1994), con lo que adoptar el Modelo Simple con una relación específica flujo-velocidad-densidad no parece una mala elección.

Las propiedades que debería cumplir una expresión analítica para la relación densidad / velocidad (Del Castillo y Benítez, 1995a, 1995b) imponen tantas restricciones que la aceptación por parte de la comunidad científica de una expresión general es aún un problema abierto. Del Castillo y Benítez (1995) proponen la siguiente familia de relaciones velocidad-densidad:

$$u(x, t) = u_f [1 - F(\theta)], \quad \theta = \frac{1}{u_f} \left( \frac{1}{k(x, t)} - 1 \right) \quad (4.8.2)$$

Donde:

$$u(x, t) = \frac{V(x, t)}{|C_j|}, \quad k(x, t) = \frac{K(x, t)}{|K_j|}, \quad C_j = \frac{\partial Q(x, t)}{\partial K(x, t)} \Big|_{K_j} \quad (4.8.3)$$

Siendo  $K_j$  la densidad de congestión o atasco,  $C_j$  la velocidad de onda cinemática para la densidad de congestión, y  $F(\theta)$  una función de generación densidad-velocidad (Del Castillo y Benítez, 1995).

La generalización de la expresión (4.8.1) a dos dimensiones es inmediata:

<sup>14</sup> Modelización del Tráfico Urbano Mediante Teorías del Continuo. Luís Miguel Romero Pérez. Francisco García Benítez. IV Congreso de Ingeniería del Transporte

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot f(x, t) = \rho(x, t) \quad (4.8.4)$$

Donde  $f(x, t)$  es el vector flujo de tráfico,  $F(x, t)$  la densidad de tráfico y  $\phi(x, t)$  la función de generación de tráfico.

Admitiendo que el flujo de tráfico en el punto  $x$  en el instante  $t$  no depende únicamente de la densidad de tráfico y de la velocidad en ese punto y en ese instante, sino que también depende de los gradientes de densidad, como físicamente se observa, se puede escribir:

$$f(x, t) = -\mu \nabla \phi(x, t) + u(x, t) \phi(x, t) \quad (4.8.5)$$

Siendo en este caso la velocidad un vector de componentes  $u_x, u_y$ , dadas ambas por una expresión similar a la (4.8.2). Admitiendo que la variación espacial de la velocidad respecto a una velocidad de equilibrio es pequeña, podemos escribir:

$$u(x, t) = \bar{u}(t) + \tilde{u}(x, t) \quad (4.8.6)$$

Sustituyendo las expresiones (4.8.5) y (4.8.6) en la (4.8.4), teniendo en cuenta que:

$$\nabla \cdot \bar{u}(t) = 0 \quad (4.8.7)$$

Se obtiene:

$$\mu \nabla^2 \phi(x, t) - \bar{u}(t) \cdot \nabla \phi(x, t) = \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} - \rho(x, t) + \nabla(\tilde{u}(x, t) \phi(x, t)) \quad (4.8.8)$$

La ecuación (4.8.8) define el modelo de la pseudo-convección-difusión (Benítez, 1995; Romero, 1999), denominado así por la similitud existente entre dicha ecuación y la ecuación de la convección-difusión.

## EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO AL MODELO DE LA PSEUDO-CONVECCIÓN-DIFUSIÓN

### Ecuación Integral de la Pseudo-Convección-Difusión

Multiplicando la ecuación (4.8.8) por  $\phi(x, t)$  e integrando en el dominio  $\mathcal{R}(\eta) \equiv \mathcal{R} - \mathcal{B}(\eta)$ , donde  $\mathcal{B}(\eta)$  es un círculo centrado en  $\xi$  y de radio  $\eta$ , con  $\eta \rightarrow 0$ , se obtiene:

$$\int_{\mathcal{R}(\eta)} [\mu \nabla^2 \phi(x, t) - \bar{u}(t) \cdot \nabla \phi(x, t)] \psi(x, \xi, t) d\mathcal{R}_x = \int_{\mathcal{R}(\eta)} \left[ \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} - \rho(x, t) + \nabla(\tilde{u}(x, t) \phi(x, t)) \right] \psi(x, \xi, t) d\mathcal{R}_x \quad (4.8.9)$$

Donde  $\phi(x, t)$  corresponde a la solución fundamental definida por la ecuación:

$$\mu \nabla^2 \psi(x, \xi, t) + \bar{u}(t) \cdot \nabla \psi(x, \xi, t) = -\delta(\xi) \quad (4.8.10)$$

La principal ventaja del Método de los Elementos de Contorno frente a otros métodos es su capacidad de dar una solución completa al problema contando únicamente con información del contorno. Para ello hay que transformar las integrales de dominio de la ecuación (4.8.9) en integrales sobre el contorno. Para conseguir esto con las integrales del primer miembro basta con integrar por partes, aplicar el teorema de Gauss a la expresión (4.8.10), obteniéndose:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}(\eta)} [\mu \nabla^2 \phi(x, t) - \bar{u}(t) \cdot \nabla \phi(x, t)] \psi(x, \xi, t) d\mathcal{R}_x &= c(\xi) \phi(\xi, t) + \\ + \int_{\partial \mathcal{R}_\eta} \phi(x, t) \left[ \mu \nabla^2 \frac{\partial \psi(x, \xi, t)}{\partial n} + \psi(x, \xi, t) \right] d\Gamma_x &- \mu \int_{\partial \mathcal{R}_\eta} \psi(x, \xi, t) \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial n} d\Gamma_x \end{aligned} \quad (4.8.11)$$

Una restricción inicial del Método de los Elementos de Contorno es que se requiere la solución fundamental de la ecuación diferencial original para obtener así la ecuación integral en el contorno. Otra es la inclusión de términos no homogéneos (como una distribución de cargas) que producen la aparición de integrales de dominio en la formulación del problema. El Método de Reciprocidad Dual trata este problema usando una solución fundamental más simple, tratando el resto de términos de la ecuación original como términos no homogéneos de la ecuación original, que se desarrollarán en serie usando unas funciones aproximantes globales (Partridge, Brebbia y Wrobel, 1992). Para cada uno de los términos de la ecuación (4.8.11), que se representan genéricamente como),  $(t \times c)$ , se usa la siguiente aproximación:

$$\chi(x, t) \approx \sum_{k=1}^M \alpha_k(t) \cdot f_k(x) \quad (4.8.12)$$

Donde las funciones aproximantes  $f_k(X)$ , las mismas para cada una de los términos del segundo miembro de la ecuación (4.8.10), verifican:

$$\mu \nabla^2 \zeta_k(x, \xi, t) + \pi(t) \cdot \nabla \zeta_k(x, \xi, t) = -f_k(\xi) \quad (4.8.13)$$

mientras que los coeficientes  $\alpha_K(t)$  a vienen dados por la solución del sistema de ecuaciones:

$$\chi_i(x, t) = \sum_{k=1}^M \alpha_k(t) \cdot f_{ik}(x), \quad \text{con } i = 1, \dots, M \quad (4.8.14)$$

lo que supone imponer que la aproximación (4.8.12) se verifique exactamente en los M puntos utilizados para ella.

Con todo ello la ecuación (4.8.9) se transforma en la siguiente ecuación, ya con integrales sólo en el contorno:

$$\begin{aligned}
 & c(\xi)\phi(\xi, t) + \int_{\partial\Omega_\eta} \phi(x, t) \left[ \mu \frac{\partial \psi(x, \xi, t)}{\partial n} + \psi(x, \xi, t) \cdot u_n \right] d\Gamma_x - \\
 & - \mu \int_{\partial\Omega_\eta} \psi(x, \xi, t) \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial n} d\Gamma_x = \sum_{k=1}^M (\alpha_k(t) + \beta_k(t) + \gamma_k(t)) \cdot [c(\xi)\zeta_k(\xi, t) + \\
 & + \int_{\partial\Omega_\eta} \phi(x, t) \left[ \mu \frac{\partial \zeta_k(x, \xi, t)}{\partial n} + \zeta_k(x, \xi, t) \cdot u_n \right] d\Gamma_x - \mu \int_{\partial\Omega_\eta} \zeta_k(x, \xi, t) \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial n} d\Gamma_x
 \end{aligned} \quad (4.8.15)$$

Siendo  $c(\phi)$  dependiente de características geométricas y del material. Las integrales sobre el contorno se resuelven discretizando éste en elementos, en los que definimos unas coordenadas naturales. En el interior de los elementos se aproximan los valores tanto de la geometría como de cualquier otro tipo de función, por medio de los valores nodales de dichas funciones. Así, si el número de los nodos usados en la discretización del contorno es  $N$ , conocidos en cada uno de ellos o bien su densidad  $F$  o bien su flujo de densidad, planteando para cada uno de dichos nodos una ecuación del tipo (4.8.15) se obtiene un sistema de  $N$  ecuaciones para  $N$  incógnitas, que en forma matricial es:

$$[B]\{\phi\} + [H_c]\{\phi_c\} - [G_c]\left\{\frac{\partial \phi_c}{\partial n}\right\} = \{d_c\} \quad (4.8.16)$$

De este sistema se obtienen los valores en cualquier punto del contorno. Aplicando de nuevo la ecuación (4.8.15) en cualquier otro punto  $\phi$  se calcula  $F$  en cualquier punto del dominio.

#### Ecuación Hipersingular del Gradiente

Multiplicando la ecuación (4.8.8) por  $\nabla_\xi \psi(x, \xi, t)$  e integrando en el dominio  $\mathcal{R}(\eta)$ , y realizando transformaciones análogas a las realizadas para obtener la ecuación (4.3.15), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & a(\xi)\phi(\xi, t) + [D]\nabla\phi(\xi, t) + \int_{\partial\Omega_\eta}^{HIP} \phi(x, t) \left[ \mu \nabla_\xi \frac{\partial \psi(x, \xi, t)}{\partial n} + \nabla_\xi \psi(x, \xi, t) \cdot u_n \right] d\Gamma_x - \\
 & - \mu \int_{\partial\Omega_\eta} \nabla_\xi \psi(x, \xi, t) \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial n} d\Gamma_x = \sum_{k=1}^M (\alpha_k(t) + \beta_k(t) + \gamma_k(t)) \cdot [a(\xi)\phi(\xi, t) + [D]\nabla\phi(\xi, t) \\
 & + \int_{\partial\Omega_\eta}^{HIP} \phi(x, t) \left[ \mu \nabla_\xi \frac{\partial \zeta_k(x, \xi, t)}{\partial n} + \nabla_\xi \zeta_k(x, \xi, t) \cdot u_n \right] d\Gamma_x - \mu \int_{\partial\Omega_\eta} \nabla_\xi \zeta_k(x, \xi, t) \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial n} d\Gamma_x
 \end{aligned} \quad (4.8.17)$$

donde  $\int_{\partial\Omega_\eta}^{HIP}$  representa una integral hipersingular, cuya resolución requiere un tratamiento especial (Romero, 1999). Las integrales de nuevo se obtienen como suma de integrales sobre los elementos, en función de los valores nodales. En cada ecuación de este tipo, una vez resuelto el sistema de ecuaciones (4.8.16), la única incógnita es  $\nabla\phi(\xi, t)$ ; planteando una ecuación de este tipo por cada punto se conoce  $\nabla\phi(\xi, t)$  en todo el dominio.



### Ecuación Hipersingular de la Laplaciana de la Pseudo-Convección-Difusión

Multiplicando la ecuación (4.8.8) por  $\nabla_{\xi}^2 \psi(x, \xi, t)$  e integrando en el dominio  $\mathcal{R}(\eta)$ , y realizando transformaciones análogas a las realizadas para obtener las ecuaciones (4.8.15) y (4.8.17), se obtiene:

$$\begin{aligned} & a'(\xi)\phi(\xi, t) + d(\xi)\nabla\phi(\xi, t) + \int_{\partial\mathcal{R}_\eta}^{HIP} \phi(x, t) \left[ \mu \nabla_{\xi}^2 \frac{\partial\psi(x, \xi, t)}{\partial n} + \nabla_{\xi}^2 \psi(x, \xi, t) \cdot u_n \right] d\Gamma_x - \\ & - \mu \int_{\partial\mathcal{R}_\eta} \nabla_{\xi}^2 \psi(x, \xi, t) \frac{\partial\phi(x, t)}{\partial n} d\Gamma_x = \\ & = \sum_{k=1}^M (\alpha_k(t) + \beta_k(t) + \gamma_k(t)) \cdot [a'(\xi)\phi(\xi, t) + d(\xi)\nabla\phi(\xi, t) + \\ & + \int_{\partial\mathcal{R}_\eta}^{HIP} \phi(x, t) \left[ \mu \nabla_{\xi}^2 \frac{\partial\zeta_k(x, \xi, t)}{\partial n} + \nabla_{\xi}^2 \zeta_k(x, \xi, t) \cdot u_n \right] d\Gamma_x - \mu \int_{\partial\mathcal{R}_\eta} \nabla_{\xi}^2 \zeta_k(x, \xi, t) \frac{\partial\phi(x, t)}{\partial n} d\Gamma_x ] \end{aligned} \quad (4.8.18)$$

Aparentemente la ecuación (4.8.18), una vez resueltos los sistema de ecuaciones (4.8.16) y (4.8.17) no presenta ninguna incógnita, con lo que sería redundante. En el algoritmo propuesto a continuación se plantean  $M$  ecuaciones de este tipo, una para cada nodo utilizado en el Método de la

Reciprocidad Dual, para estimar el vector  $\{\nabla(\tilde{u}(x, t)\phi(x, t))\}^m$ , que aparece implícitamente en el término  $\gamma_k(t)$ , que proviene de la resolución del sistema de ecuaciones (4.8.14 y 4.8.15) con  $\chi_i(x, t) = \nabla(\tilde{u}(x, t)\phi(x, t))_i$ .

### ALGORITMO NUMÉRICO

Se propone el siguiente algoritmo para la obtención de las densidades de tráfico, flujos y velocidades de una región continua:

1. Definición del problema:

- a) Discretización del contorno.
- b) Definición de los puntos internos.
- c) Definición de los parámetros de tiempo: Paso de integración, coeficientes de ponderación, intervalo a estudiar.

2. Definición del estado inicial,  $t_0$ .

3. Definición de datos para el instante  $t_m$ .

a) Correspondientes a condiciones de contorno de densidades: condiciones de contorno de

Dirichlet:  $\{\phi\}^m$ , condiciones de contorno de Newman:  $\left\{\frac{\partial\phi}{\partial n}\right\}^m$  y condiciones de contorno

mixtas:  $\{\phi\}^m$  en  $\partial R_\theta$  y  $\left\{\frac{\partial\phi}{\partial n}\right\}^m$  en  $\partial R_{\partial n}$ .

b) Correspondientes a condiciones de contorno de velocidades o flujos.

c) Correspondientes a condiciones de contorno y de dominio de generación de vehículos.

- d) Correspondientes a condiciones de contorno de variaciones con el tiempo de  $\theta$ .
4. Estimar  $\bar{u}(t)$  y  $\nabla \cdot [\bar{u}(x, t)\phi(x, t)]$  en todos los puntos del contorno:  $\{\bar{u}(t)\}^m$  y  $\{\nabla \cdot [\bar{u}(x, t)\phi(x, t)]\}^m$ :
- Considerar inicialmente  $\{\nabla \cdot [\bar{u}(x, t)\phi(x, t)]\}^m$ .
  - Tomar como valor inicial de  $\bar{u}(t^m)$  la media de los valores de  $u$  que son conocidos:  

$$\bar{u}^m \equiv \bar{u}(t^m) = E[u(x, t^m)] \text{ con } x \in R_u$$
5. Resolver el sistema de ecuaciones (4.3.16), obteniendo las componentes de los vectores  $\{\theta\}^m$  y  $\left\{\frac{\partial \phi}{\partial n}\right\}^m$  que son desconocidas.
6. Obtener  $\nabla \phi$  de la ecuación (4.8.17) para todos los nodos.
7. Obtener  $u(x, t)$  en los puntos, tanto del contorno como del interior, donde es desconocida, mediante la expresión
- $$u(x, t) = \frac{1}{\phi(x, t)} (f(x, t) + \mu \nabla \phi(x, t))$$
8. Reestimar  $\bar{u}$ , teniendo en cuenta que en este punto todas las  $u$  son conocidas, con lo que:  

$$\bar{u}^m \equiv \bar{u}(t^m) = E[u(x, t^m)] \text{ con } x \in R$$
9. ¿Difiere mucho la nueva  $\bar{u}$  de la anterior?  
 SÍ = Volver al paso 5 con la nueva  $\bar{u}$ .  
 NO = Continuar.
10. Reestimar  $\nabla \cdot [\bar{u}(x, t)\phi(x, t)]$ . Plantear el sistema de ecuaciones (4.8.18), de donde se obtiene el vector  $\{\nabla \cdot [\bar{u}(x, t)\phi(x, t)]\}^m$ , que incluye todos los puntos utilizados en el Método de Reciprocidad Dual, tantos puntos internos como del contorno.
11. ¿Difiere mucho el nuevo  $\{\nabla \cdot [\bar{u}(x, t)\phi(x, t)]\}^m$  del anterior?  
 SÍ = Volver al paso 5 con el nuevo vector  $\{\nabla \cdot [\bar{u}(x, t)\phi(x, t)]\}^m$ .  
 NO = Continuar.
12. Definir el nuevo paso de tiempo  $m = m + 1$ . Ir al paso 3.

#### 4.9 MODELO BASADO EN LA TEORÍA CINÉTICA DE GASES<sup>15</sup>

Tipo: Asignación

En la teoría cinética, el tránsito se estudia como un gas donde las partículas que lo componen interactúan unas con otras y cada partícula representa un automóvil. Existen diferentes modelos como el de Prigogine y el de Pavari-Fontana para flujo de tránsito que han sido desarrollados tomando como base la teoría cinética de gases. En esta teoría el flujo de tránsito puede ser entendido al estudiar la función de distribución  $f(x, v, t)$  que describe el número de autos en el intervalo de la carretera  $(x, x + dx)$  con una velocidad  $(v, v + dv)$  para un tiempo dado  $t$ . Esta función también se puede expresar en términos de dos variables fundamentales: *concentración* y *flujo*. Un buen entendimiento de la relación de concentración y flujo es la base para describir el tránsito. La curva flujo-concentración se denomina el *diagrama fundamental* de tránsito en una carretera o la *ecuación de estado* de la teoría de tránsito (ver figura 4.6.1). En bajas densidades, el flujo se incrementa linealmente junto con la concentración. Los autos se mueven de manera independiente en el tránsito diluido con pequeñas fluctuaciones alrededor de una velocidad media. Con el incremento en la concentración los autos se van estorbando unos a otros cada vez más, lo cual lleva a la reducción del promedio de velocidad. Los efectos de que los autos se estén estorbando se hacen dominantes en altas concentraciones. En una *densidad crítica*, el flujo exhibe un máximo, de tal manera que un incremento en la densidad resulta en un decremento del avance total, y finalmente en una completa fase de congestión donde no hay auto que pueda moverse y el flujo es cero.

Por otro lado, la *varianza* en las velocidades de los autos también propicia la formación de congestionamientos o atascamientos de tránsito. Los atascamientos de tránsito son fases localmente congestionadas en las cuales los autos viajan a baja velocidad o están detenidos. Entre los atascamientos uno encuentra autos en bajas concentraciones viajando a altas velocidades. Esas fases congestionadas son configuraciones bastante estables con su propia dinámica. Los autos conduciendo dentro de atascamientos se estabilizan y los autos saliendo desde el frente reducen la longitud del atascamiento. Desde este punto de vista, los atascamientos se mueven lentamente en la dirección opuesta a la de los autos. Su velocidad se puede estimar con un modelo muy simple donde uno asume que hay una velocidad pequeña constante  $v_1$  y una densidad  $\rho_1$  en el atascamiento, y una velocidad alta  $v_2$  y baja densidad  $\rho_2$  fuera de él. Si los autos aceleran y disminuyen su

velocidad en el acto, el atascamiento se mueve con una velocidad  $V_{jam} = -(V_2 - V_1) \frac{\rho_1}{\rho_2} + V_1$ .

<sup>15</sup> Modelación de flujo de transito de autos utilizando autómatas celulares. Trabajo de grado. Rene Rodríguez Zamora. Universidad Autónoma de Puebla. Septiembre de 2002

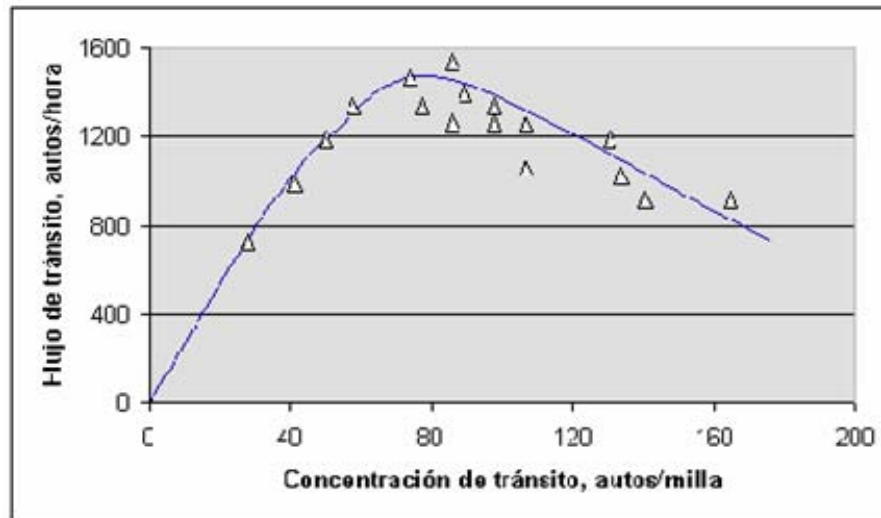


Figura 4.9.1. Diagrama fundamental de flujo de tránsito  
Puesto que el radio de densidad es pequeño, los atascamientos se mueven lentamente.

#### 4.10 MODELO BASADO EN LA TEORÍA DINÁMICA DE FLUIDOS<sup>16</sup>

Tipo: Asignación.

Uno de los campos de la física más complicados de estudiar son los fluidos, el comportamiento de gases y líquidos en movimiento. Comprender, por ejemplo, los flujos de aire turbulento o los remolinos que se forman cuando el agua discurre por una tubería o la sangre por una arteria son de suma importancia, tanto para la ingeniería como para la medicina.

Las ecuaciones que rigen la dinámica de fluidos son las conocidas como ecuaciones de Navier-Stokes, producto del francés constructor de puentes Claude-Louis Navier y del matemático irlandés George Stokes. El primero en obtener estas ecuaciones fue el francés en una época (1822) en que no se comprendía muy bien cuál era la física de la situación que estaba matematizando. De hecho, lo único que hizo fue modificar unas ecuaciones ya existentes y obtenidas por el famoso matemático Euler, de modo que incluyesen las fuerzas existentes entre las moléculas del fluido. Aproximadamente 20 años después, Stokes justificó las ecuaciones del ingeniero francés deduciéndolas adecuadamente. A pesar de que las ecuaciones de Navier-Stokes son sólo una aproximación del comportamiento real de los fluidos, se utilizan para estudiar cualquier aspecto que tenga que ver con éstos; el problema es que si uno estudia el movimiento de un fluido con estas ecuaciones, es incapaz de prever si ese movimiento se va a mantener siempre o se va a complicar.

Los modelos basados en la teoría de dinámica de fluidos han sido desarrollados desde los 1950's y se han utilizado en la ciencia de tránsito con un éxito considerable. Cuando es visto desde una gran distancia, por ejemplo, desde un avión, el tránsito pesado aparece como el torrente de un fluido. Por lo tanto, un estudio con enfoque *macroscópico* sobre el flujo de tránsito de autos se puede desarrollar en analogía con la teoría hidrodinámica de fluidos tratando al tránsito como un fluido unidimensional de izquierda a derecha.

Sean  $\rho(x, t)$  y  $J(x, t)$  la densidad y el flujo en una posición arbitraria  $x$  en un instante arbitrario de tiempo  $t$ . La ecuación de continuidad que relaciona a la densidad y el flujo del tránsito vehicular como un fluido en una carretera donde no hay ningún tipo de intersección es:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} = 0$$

(4.10.1)

Sin embargo, la ecuación (4.10.1) no se puede resolver debido a que existen dos funciones desconocidas:  $\rho(x, t)$  y  $J(x, t)$ . En uno de los primeros modelos para flujo de tránsito, Lighthill y Whitham asumen que la función  $J(x, t)$  es determinada por la función  $\rho(x, t)$ , es decir,  $J(x, t) = J(\rho(x, t))$ . Insertando esto en la ecuación de continuidad (4.10.1) se obtiene la ecuación denominada Lighthill-Whitham

<sup>16</sup> Modelación de flujo de transito de autos utilizando autómatas celulares. Trabajo de grado. Rene Rodríguez Zamora. Universidad Autónoma de Puebla. Septiembre de 2002

$$\frac{\partial_{\rho}(x,t)}{\partial_t} + vg \frac{\partial_{\rho}(x,t)}{\partial_x} = 0 \quad (4.10.2)$$

Donde

$$vg(\rho) = \frac{dJ(c)}{dc}$$

En los modelos basados en la teoría de dinámica de fluidos también se contempla la posibilidad de que surjan atascamientos mediante la incorporación de variables que representan elementos tales como *presión del gas vehicular* y *viscosidad*. También se incorpora la *varianza* de las velocidades como una variable adicional dependiente del espacio y del tiempo, haciendo una analogía con las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos. Con esto se observa un comportamiento más realista de los atascamientos que se desarrollan.

Al igual que en la teoría cinética, existe un diagrama fundamental que indica de que manera se comporta el flujo bajo diferentes concentraciones o densidades.

#### 4.11 MODELO BASADO EN LA TEORÍA CAR-FOLLOWING<sup>17</sup>

Tipo: Asignación

La teoría *car-following* asume una relación lineal entre la (re)acción y el estímulo: acción = sensibilidad \* estímulo.

El estímulo podría, por ejemplo, ser la distancia hacia el auto de adelante, o la diferencia de las velocidades. Una de las primeras propuestas fue

$$v_i(t + \tau) \alpha \Delta x_i(t) \quad (4.11.1)$$

donde  $v_i$  es la velocidad del  $i$ -ésimo auto en una cadena,  $\tau$  es el tiempo necesario para la adaptación (este tiempo es más grande que el tiempo de reacción), y  $\Delta x$  es la distancia hacia el siguiente auto adelante. La mayoría de las teorías tratan a los vehículos como puntos. Especialmente en épocas recientes, esta aproximación a brindado nuevos resultados.

Derivando la ecuación (4.11.1) con respecto al tiempo nos da

$$\alpha_i(t + \tau) \alpha \Delta v_i(t)$$

donde  $\alpha$  es la aceleración de  $i$  y  $\Delta v$  es la diferencia de velocidad con respecto al siguiente auto de adelante. Una generalización tomando en cuenta que la sensibilidad depende de la distancia y de la velocidad es

$$\alpha_i(t + \tau) = c_1 * \frac{[v_i(t)]^m}{[\Delta x_i(t)]^l} * \Delta v_i(t) \quad (4.11.2)$$

donde  $l$  y  $m$  son números enteros. Esta ecuación ha sido analizada en gran detalle en los 1960's, por ejemplo con respecto a su estabilidad para un *car-following* sencillo o para una cadena infinitamente larga de autos. Uno puede derivar las relaciones velocidad-densidad y por consiguiente flujo-densidad desde la ecuación (4.11.2).

En cualquier caso, la ecuación (4.11.2) es problemática para la estimación numérica. Cuando  $\Delta v$  es cero, la ecuación permite una distancia arbitrariamente pequeña hacia el auto de adelante a la vez que permite una velocidad muy alta. En la teoría, esto nunca pasa en tanto que uno empiece desde condiciones iniciales realistas, pero debido a la imprecisión numérica de las simulaciones tales situaciones pueden ocurrir.

Un modelo basado en la teoría *car-following* es el modelo de velocidad óptima (OVM). La ecuación de aceleración del modelo de velocidad óptima es:

$$v = \alpha * (V(\Delta x) - v) \quad (4.11.3)$$

donde  $V(\Delta x)$  es una función cuyas características son  $V(\Delta x) \rightarrow v_{\max}$  si  $\Delta x \rightarrow \infty$  y  $V(\Delta x)$  a cierta distancia de  $\Delta x$ . Este modelo ha sido analizado en gran detalle en. Para pequeñas densidades solamente existe una solución homogénea, donde todos los autos se conducen con la misma velocidad. En una cierta densidad  $\rho^{II}$ , esta solución homogénea se hace linealmente

<sup>17</sup> Modelación de flujo de transito de autos utilizando autómatas celulares. Trabajo de grado. Rene Rodríguez Zamora. Universidad Autónoma de Puebla. Septiembre de 2002

inestable y es cambiada por una solución donde el sistema tiene varios atascamientos que son separados por regiones de libre flujo. La densidad  $\rho^{out}$  de tales atascamientos es más pequeña que  $\rho^{in}$ , y por esta razón una alteración bastante grande puede mover la intensidad del tránsito desde un régimen de tránsito ligero a un régimen de tránsito pesado para densidades abajo de  $\rho^{in}$  (pero más grandes que  $\rho^{out}$ ).

Este modelo es estructuralmente estable, en el sentido de que pequeños cambios en la ecuación del modelo no cambian su comportamiento general. Por ejemplo, la introducción explícita de tiempo de retardo en la ecuación (4.11.3) da

$$v(t) = \alpha[V(\Delta x(t - \tau)) - v(t)] \quad (4.11.4)$$

Aunque el retardo cambia el esquema *microscópico* en el sentido de que cambia el punto fijo estable en  $v = V(\Delta x)$  para un cierto rango de velocidades, el comportamiento *macroscópico* del modelo no cambia mucho, como se ha indicado por simulaciones numéricas. En general, este modelo tiene la desventaja de que no es completamente libre de choques, un problema que se agrava cuando se utiliza tiempo de retardo y este despliega aceleraciones muy grandes.

Otro enfoque *car-following* se basa en observaciones psicológicas y fisiológicas. Wiedemann repasa este tipo de observaciones antes de describir una simulación microscópica del modelo *car-following*.

Wiedemann considera varios aspectos, uno de ellos es que la resolución angular del ojo humano es limitada. Aún cuando un humano puede detectar a un auto que está acercándose, este puede estimar su velocidad solamente cuando el auto se hace notablemente grande en su campo de visión, por ejemplo, cuando el ángulo entre las partes izquierda y derecha del auto se incrementan. Utilizando argumentos geométricos, uno puede darse cuenta que este umbral de observabilidad es proporcional a la diferencia de velocidad, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia

$$umbral \propto \frac{\Delta v}{\Delta x^2} \quad (4.11.5)$$

Note que esto es similar a la ecuación (4.11.2) del modelo matemático *car-following* con  $l = 2$  y  $m = 0$ .

De esta manera, después de cruzar el umbral, la disminución de la velocidad o el frenado se ajusta con la meta de alcanzar la velocidad del auto de enfrente junto con un cierto espacio deseado. Medidas consistentes con el argumento fisiológico indican que el umbral de reacción es independiente de ciertas velocidades. De esta manera, en algunas ocasiones el frenar de emergencia puede ser necesario.

Además, la reacción humana para frenar usualmente no es muy precisa, lo que introduce un elemento altamente estocástico en el modelo *car following*.

Resultados más precisos podrían obtenerse utilizando la psicología ecológica. La psicología ecológica trata de encontrar principios generales de cómo los organismos, incluyendo humanos, interactúan con su ambiente. Las percepciones visuales ligan al perceptor con su ambiente vía un campo de flujo óptico, el cual provee la información visual relevante de una determinada acción.



En el contexto *car-following*, el concepto ``tiempo de contacto" es relevante. El tiempo de contacto ha probado ser un descriptor que informa al perceptor acerca del movimiento necesario dada una meta. Esta meta podría ser, por ejemplo, arribar tranquilamente a una posición *car- following* deseada.

#### 4.12 MODELO BASADO EN LA TEORÍA DE COLAS<sup>18</sup>

Tipo: Asignación

La teoría de colas en su forma más simple asume que un servicio es proporcionado con una cierta velocidad, y que las solicitudes a ese servicio llegan usualmente a diferentes velocidades. El tiempo entre el arribo del elemento  $n$  y el elemento  $n - 1$  de una cola se llama el tiempo de interarribo del elemento  $n$ , y la longitud de tiempo en la cual el elemento  $n$  de la cola permanecerá en servicio, su tiempo de servicio.

Supongamos que el índice (velocidad) de arribos es  $\lambda$  y el índice de salidas desde una cola no vacía es  $\mu$ ; entonces el promedio de la distribución de interarribos es  $\frac{1}{\lambda}$  y el promedio de la distribución de tiempo de servicio es  $\frac{1}{\mu}$ . El índice de esas cantidades  $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$  es llamado la *intensidad de tránsito* de la cola.

Cuando la velocidad a la que llegan las solicitudes es más alta que la velocidad de servicio, se formará una cola de solicitudes. La velocidad de servicio aquí es generada para un tránsito liviano y la formación de una cola se da cuando el tránsito que puede potencialmente llegar hacia el tránsito liviano es más grande que el tránsito que puede ir a través del tránsito liviano.

Los arcos compuestos de colas pueden ser conectadas para reflejar redes de transporte. La velocidad de cada arco/cola podría entonces corresponder a la capacidad de ese arco.

La introducción de colas con almacenamiento infinito no permite la creación de congestionamientos. Los congestionamientos son causados por ligas que se llenan, lo cual pasa cuando la demanda es más alta que la capacidad, por ejemplo, mas autos entran a la liga que los que pueden salir. Ligas llenas no aceptan cualquier otro auto que necesite entrar a la liga llena. En esta forma, una sola liga donde la demanda excede la capacidad puede causar una congestión que se extienda a través de una red.

En 1997, Gawron introdujo un modelo similar a los modelos tradicionales para flujo de tránsito de autos basados en la teoría de colas, con la diferencia de que este incluye la modelación de congestiones. El número de autos que dejan un arco es limitado por la capacidad de este y por el número de autos los cuales pueden acomodarse en los arco destino. Si el arco destino de un auto está lleno, este permanecerá donde está.

Cada vez que un auto entre a un arco, se calcula un tiempo de viaje esperado. Una primera versión de este modelo propone calcular el tiempo de viaje desde la longitud y el estado actual del arco. El diagrama fundamental propone una velocidad deseada de acuerdo a la densidad actual. Una versión más reciente solamente considera la velocidad de libre flujo para calcular el tiempo de viaje.

---

<sup>18</sup> Modelación de flujo de transito de autos utilizando autómatas celulares. Trabajo de grado. Rene Rodríguez Zamora. Universidad Autónoma de Puebla. Septiembre de 2002

#### 4.13 MODELO TIPO DIRECTO<sup>19</sup>

Tipo: Asignación

En los modelos directos se integra, en una misma ecuación, los valores explicativos que se consideran se toman en cuenta en el proceso de decisión.

Su fórmula general es:

$$N_{ij}^m = f(VS_i^k, VS_j^k, CT_{i-j}^m, CT_{i-j}^n)$$

Donde:

$N_{ij}^m$  = Viajes entre i y j en el modo m.

$VS_i^k, VS_j^k, k = 1, 2, \dots, n$ , = Variables socioeconómicas expresivas de la actividad económica en las zonas i y j.

$CT_{i,j}^m$  = Costes de transporte en el modo m entre i y j.

$CT_{i,j}^n$  = Costes de transportes,  $n \neq m$ , en el resto de los modos entre i y j.

Un modelo simplificado de este tipo, referido a movilidad por carretera, es:

$$N_{ij} = k \frac{(P_i \cdot P_j)^\alpha}{C_{ij}^\beta}$$

$N_{ij}$  = Viajes por carretera entre i y j.

$P_i$  y  $P_j$  = Parque en las zonas i y j.

$C_{ij}$  = Coste de transporte entre i y j (Distancia, Tiempo o Coste)

$k, \alpha$  y  $\beta$  = constantes a ajustar por regresión lineal, transformando la expresión lineal

$$\ln N_{ij} = \ln K + \alpha \ln (P_i \cdot P_j) - \beta \ln C_{ij}$$

<sup>19</sup> Curso sobre tráfico urbano. Modelos de transporte. José Luís Maldonado Inocencio. Febrero de 1992

#### 4.14 MODELO DEL AUTÓMATA CELULAR (CA)<sup>20</sup>

Tipo: Asignación

Este es un modelo probabilístico. Consiste en  $N$  vehículos que se mueven en una dirección sobre una celosía uni-dimensional de células  $L$  colocadas en una topología tipo anillo. El número de vehículos es fijo. Cada célula está vacía o está ocupada por un solo vehículo que viaja con velocidad  $v$  que toma valores que van de 0 al  $v_{\max}$ . Este límite de velocidad puede ser diferente dependiendo del tipo de vehículo, bajo la consideración: camiones, automóviles, el etc. en este modelo sólo un tipo de vehículos es considerado por simplicidad, y por consiguiente la misma velocidad máxima se usará para todos los vehículos.

La velocidad integral que corresponde a uno de los estados del vehículo en CA está relacionada con el número de células que un vehículo adelanta en un tiempo de recorrido, el otro estado, La posición, está relacionado con la célula que cada vehículo está ocupando.

La longitud típica de una célula ( $\Delta x$ ) está alrededor de 7.5 m. se interpreta como la longitud de un vehículo más la distancia entre los vehículos en un embotellamiento, pero puede ajustarse adecuadamente según el problema bajo consideración. El tiempo de recorrido ( $\Delta t$ ) se toma como un 1s. Por consiguiente, las transiciones son de  $t \rightarrow t + 1$ . Este Tiempo está en orden de reacción del hombre. Puede modificarse fácilmente. Con estos valores de  $\Delta x$  y  $\Delta t$ ,  $v = 1$  corresponde a un vehículo que se mueve de una célula a otra célula vecina justo delante, y se mueve a 27 km/h. La velocidad máxima se pone al  $v_{\max} = 5$  que son equivalente a 135 km/h.

Debido a la naturaleza discreta de espacio y tiempo en modelos de CA, es conveniente normalizar unidades de distancia, velocidad y tiempo con respecto a la longitud de cada célula  $\Delta x$  y el tiempo de recorrido  $\Delta t$ . Por consiguiente, unidades en la posición  $x$  denotan el número de célula en la celosía; en la velocidad  $v$ , el número de células por unidad de tiempo  $t$ , tiempo  $t$ , Tiempos de recorrido.

Dejar que  $v_i$  y  $x_i$  denoten la velocidad actual y posición de vehículo  $i$ , y el  $v_p$  y  $x_p$  sean la velocidad y posición del vehículo (el vehículo precedente) en un momento dado; el  $d_i = x_p - x_i - 1$  denota la distancia (el número de células vacías) delante del vehículo en la posición  $x_i$ .

Las condiciones transitorias son definidas con el siguiente juego de reglas que son simultáneamente aplicadas a todos los vehículos:

S1: Aceleración. Si el  $v_i < v_{\max}$ , la velocidad de vehículo  $i$  se incrementa uno.

$$v_i \rightarrow \min(v_i + 1, v_{\max})$$

S2: Aleatoriamente. Si el  $v_i > 0$ , la velocidad de vehículo  $i$  se disminuye al azar por uno, con la probabilidad  $R$

---

<sup>20</sup> Cellular automata for one-lane traffic flow modeling. M.E. Lárraga. J.A. del Río. L. Álvarez-Icaza. Transportation Research Part C: Emerging Technologies. Volume 13, Issue 1, February 2005, Pages 63-74.

$v_i \rightarrow \max(v_i - 1, 0)$  con probabilidad R

S3: Desaceleración. Si al redondear  $(d_i + (1 - \alpha) \cdot v_p) < v_i$ , la velocidad de vehículo i se reduce al redondeo  $(d_i + (1 - \alpha) \cdot v_p)$

Donde la función redondear se aproxima al entero mas cercano

S4: El movimiento del vehículo. Cada vehículo se avanza según su nueva velocidad determinada en pasos 1 – 3

$x_i \rightarrow x_i + v_i$

S1, S2 y S3 se diseñan para adaptar la velocidad de los vehículos; S4 adapta la posición. Según esto, la actualización del estado es dividido en dos fases, primero la velocidad, segundo la posición.

S1. Esta regla postula que todos los conductores se esfuerzan para alcanzar la velocidad máxima siempre que sea posible. Esto está de acuerdo con otras políticas de velocidad, como es el caso con la política ávida en Broucke y Varaiya (1996).

S2. Esta regla representa factores inadvertidos que hacen que los conductores disminuyan la velocidad sin ninguna razón clara. Por ejemplo, estas situaciones incluyen las circunstancias que hacen distraer a los conductores a lo largo de la carretera. Este frenando aleatorio puede contribuir a la creación de atascos.

S3. Esta regla se diseña para evitar la colisión de los vehículos. El término redondear  $(d_i + (1 - \alpha) \cdot v_p)$  representa la velocidad que el conductor estima para tener para evitar la colisión con el vehículo precedente durante el recorrido. Variando el parámetro  $\alpha$ , que se refiere a aquí como el parámetro de distancia seguro, esta estimación puede ponerse a punto. La interpretación física de  $\alpha$  se discute luego.

La regla S3 es la modificación principal al modelo en Nagel y Schreckenberg (1992), que es llamado el modelo de NaSch. Primero, debe notarse que la regla de desaceleración del modelo de NaSch se recupera cuando se usa el valor  $\alpha = 1$ . Por consiguiente, la regla S3 puede verse como una generalización de NaSch - la regla del modelo de desaceleración. La regla de NaSch-desaceleración permite valores de desaceleración que no son físicamente factibles. Por ejemplo, si un vehículo está viajando a la velocidad máxima  $v = 5$  y se encuentra con un vehículo detenido, la regla de NaSch-desaceleración ordena una reducción de  $v = 5$  a  $v = 0$  en 1 s. Esto representa una desaceleración de 37.5 [el m/s<sup>2</sup>], claramente más allá de las capacidades físicas de vehículos. Hay escenarios dónde no se le exige a los vehículos mantener una separación alejada de los vehículos que van delante de el. El parámetro  $\alpha$ , denotado aquí como el parámetro de seguridad, está principalmente relacionado con el grado de agresividad de los conductores (si  $\alpha$  es mas cercano a cero la conducta es mas agresiva), aunque también puede relacionarse con el grado de automatización de la carretera (con los niveles altos de automatización se permite un pequeño espacio entre vehiculos a altas velocidades). Para las carreteras normales, con los niveles bajos de automatización, los valores de  $\alpha$  son mas cercanos a uno y puede calibrarse para representar los valores de desaceleración factibles.

Debe notarse que la cantidad  $((1 - \alpha) \cdot v_p)$  en la regla S3 puede verse como una distancia de seguridad que se agrega al  $d_i$ . Esta distancia permite la desaceleración del vehículo para tomar más espacio. Los valores de  $\alpha$  se seleccionan de tal una manera que  $(d_i + (1 - \alpha) \cdot v_p)$  toma valores discretos. Si ese no es el caso, el valor se redondea al entero más cercano. El valor de  $\alpha$  puede ser tomado de una manera espacialmente dependiente, intentando representar, por ejemplo, los lugares con los cambios de topología o curvatura.

Hay un precio por pagar con esta modificación que limita los valores de desaceleración. Podría ser el caso en que una desaceleración de un vehículo implica desaceleraciones de los vehículos de atrás que ahora también tienen que limitar la capacidad de desaceleración. El escenario más crítico se representaría por una cadena de vehículos, cada uno de ellos viajando a la velocidad máxima, con el primer vehículo yendo hacia un vehículo detenido. Para poner todas las velocidades de los vehículos en una cadena constante, cada uno de ellos usa la máxima desaceleración disponible, S3 tiene que ser iterada  $(v_{\max} - 1)$  veces, asumiendo la disminución de la velocidad para cada uno de los vehículos en la cadena.

La otra modificación pertinente al modelo de NaSch es el cambio en la aplicación de la desaceleración y reglas de aleatoriedad. En el modelo de NaSch, la aleatoriedad es aplicada después de la desaceleración, mientras en el modelo aquí propuesto la aleatoriedad es aplicada primero y la desaceleración después. La razón principal para este cambio es que cuando los valores de desaceleración están limitados, regla S3 tiene que ser iterada para producir los valores de velocidad consistentes. Si las aleatoriedades ocurrieran después, una desaceleración adicional podría inducir la inconsistencia en las velocidades.

Este modelo de CA es un modelo mínimo en el sentido que todos los cuatro pasos son necesarios para reproducir los rasgos básicos del tráfico real. Sin embargo, las reglas adicionales pueden incorporarse para capturar las situaciones más complejas (el Knospe et al., 2000). Los parámetros del modelo son los siguientes: el número de células  $L$ , el número de vehículos  $N$ ,  $v_{\max}$  de velocidad de límite, el parámetro frenando aleatorio  $R$  y el parámetro de distancia segura  $\alpha$ , que en este documento toma los valores 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1,.

#### 4.15 MODELO ESTRUCTURAL<sup>21</sup>

Tipo: Asignación

La estructura de dos nodos para dos enlaces de red se muestra en la Figura 4.16.1 a lo largo del diagrama de cuerpo libre de la unión cargada.

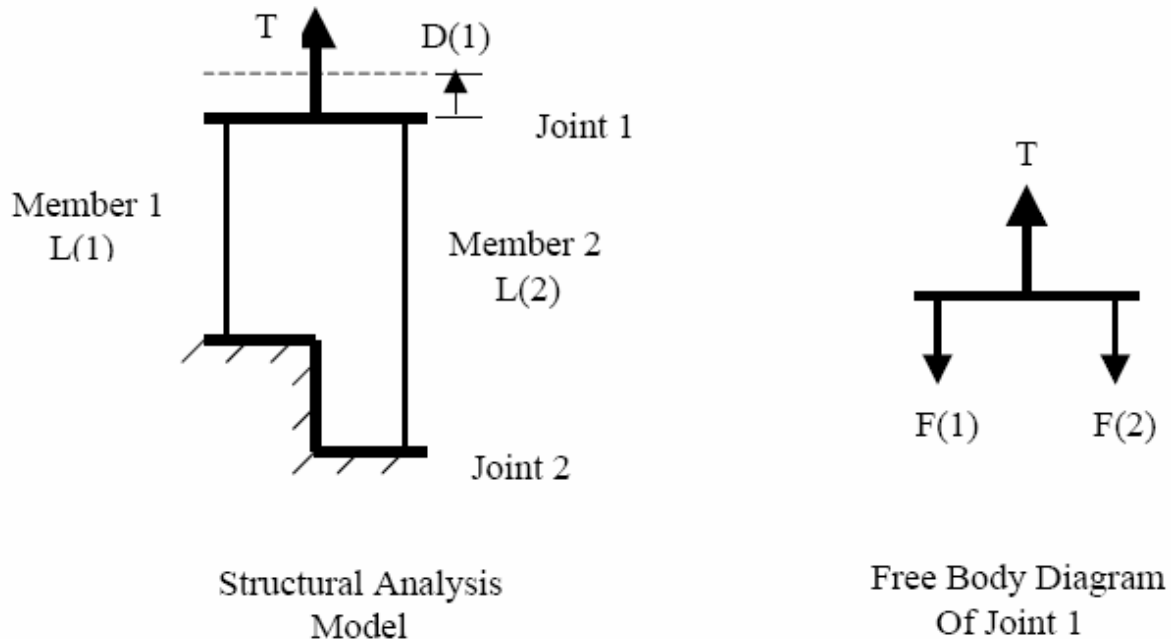


Figura 4.15.1 Modelo Estructural

Los nodos en la red corresponden a las uniones en la estructura, y los eslabones corresponden a los miembros. Los números de las uniones y los miembros en el modelo de análisis estructural son iguales a los números de uniones y eslabones del modelo de red. Cada unión se representa por una línea horizontal. Los miembros en la estructura son representados por líneas verticales conectando las apropiadas uniones. Para permitir que la estructura sea trazada de una manera sistemática y ordenada, se colocan las uniones aumentando el orden numérico de la cima hasta la parte baja de la hoja, y los miembros son colocados en orden creciente de izquierda a derecha.

La figura resultante representa una estructura compuesta de miembros verticales cargados axialmente que conectan las barras horizontales rígidas. Los miembros pueden ser considerados como resortes.

Esta estructura es asumida solo para desplazamientos en dirección vertical; las barras horizontales no hacen deformarla o rotarla.

En esencia la estructura es un cable cuyas fibras individuales son conectadas de la misma manera como los vínculos en una red de autopistas

<sup>21</sup> Traffic assignment by structural analysis methods. By James Robert Kladianos. Doctor of philosophy in Civil engineering. Laramie, Wyoming December, 2002

Para impedir que la estructura entera sufra un desplazamiento del cuerpo rígido, la estructura debe apoyarse o debe anclarse a una unión; es decir, un desplazamiento vertical de cero debe especificarse para una unión. Aunque la estructura puede apoyarse a cualquier unión, la unión más alta numerada a la más baja de la estructura será restringida para propósitos de la siguiente discusión.

Los viajes entrando y dejando la red corresponden a las uniones cargadas en la estructura.

Las fuerzas de compresión o tensión internas en los miembros individuales, resultan de las cargas aplicadas correspondientes de los viajes sobre los eslabones en la red.

**Determinación de los desplazamientos en las uniones y las fuerzas de los miembros internos en la estructura.**

Se asumen las fuerzas ascendentes y los desplazamientos ascendentes a las uniones como positivas, como son las fuerzas de tensión interna en los miembros. Basado en esta convención, los viajes que entran a la red corresponden a las cargas ascendentes en la estructura, y viajes que dejan la red corresponden a las cargas descendentes.

La fuerza del miembro tensor indica movimientos del tráfico a lo largo del eslabón del nodo con el más bajo número hacia el nodo con el número más alto.

Los tres principios fundamentales que están debajo de todos los tipos de análisis estructural, simplificado para una estructura compuesta de miembros axialmente cargados y sujetos a solo fuerzas verticales, son los siguientes.

- ✓ Equilibrio: La suma de las fuerzas verticales aplicadas a cualquier unión en la estructura deba ser igual a cero.
- ✓ Propiedades de los materiales o conducta deformación-tensión: Para un material lineal-elástico, la relación deformación-tensión es conocida como la Ley de Hooke.

$$\sigma = (E)(e)$$

Donde:

$\sigma$  = la Tensión

= Fuerza interna / transversal del área particular del miembro

=  $F / A$

E = Módulo Elástico, una constante física para un material particular,

e = Fatiga

= Cambio en la longitud de miembro / Longitud Original del miembro

= La diferencia en los desplazamientos de la unión en el fin del miembro / la longitud Original

=  $(D_i - D_j) / L$

=  $D / L$



- ✓ Compatibilidad-continuidad: Si una unión particular se aísla del resto de estructura cortando a los miembros atados a él, las fuerzas interiores en los miembros desunidos deben estar aplicadas a la unión para mantenerla quieta. Si una unión sufre un desplazamiento, los extremos de todos los miembros conectados a esa unión son cambiados de sitio la misma cantidad.

Se usan estos principios y definiciones para determinar el desplazamiento,  $D$ , y la fuerza interior,  $F$ , para un miembro cargado axialmente:

(i) Definición:  $D = (e) (L)$

(ii) Propiedades de los materiales:  $e = \sigma / E$

(iii) Remplace (ii) en (i):  $D = (\sigma / E) (L)$

(iv) Definición:  $\sigma = F / A$

(v) Remplace (iv) en (iii):

$$D = \left( \frac{F}{A} \right) \left( \frac{L}{E} \right) = \frac{FL}{AE}$$

O

$$F = D \frac{AE}{L}$$

(vi) Definición:  $D1 = \text{Cambio en la longitud de Miembro 1}$

$$= D(1) - D(2)$$

Unión 2 es firme:  $D(2) = 0$

$$D1 = D(1) - 0 = D(1)$$

Semejantemente:  $D2 = D(1)$

Para el diagrama del cuerpo libre de la unión 1 en la estructura:

(vii) Equilibrio & Compatibilidad:  $T - F(1) - F(2) = 0$

(viii) Remplace (v) en (vi) y resuelve para  $D(1)$ :

$$T - \frac{D(1)A(1)(E)}{L(1)} - \frac{D(1)A(2)(E)}{L(2)} = 0$$

$$D(1) = \frac{T}{\frac{A(1)(E)}{L(1)} + \frac{A(2)(E)}{L(2)}}$$

Con el propósito de la asignación de tráfico, sólo los efectos que las longitudes del miembro llevan sobre los desplazamientos de las uniones y las fuerzas del miembro interiores son de interés. Por consiguiente, se dice:

$$(A1)(E) = (A2)(E) = 1$$

$$D(1) = \frac{T}{\frac{1}{L(1)} + \frac{1}{L(2)}}$$

Remplace (viii) en (v), tomando  $(A)(E) = 1$ , para obtener las expresiones para las fuerzas interiores de los miembros 1 y 2:

$$F(1) = \frac{D(1)}{L(1)} = T \frac{\frac{1}{L(1)}}{\frac{1}{L(1)} + \frac{1}{L(2)}}$$

$$F(2) = \frac{D(1)}{L(2)} = T \frac{\frac{1}{L(2)}}{\frac{1}{L(1)} + \frac{1}{L(2)}}$$

Este acercamiento al análisis estructural es conocido como el método de rigidez. En general el análisis de cualquier estructura por el método de la rigidez simplemente actúa de la manera presentada. Primero, se desarrollan las ecuaciones de equilibrio para cada unión en la estructura. Las variables en estas ecuaciones son los desplazamientos en las juntas,  $D(k)$ . Los coeficientes de estas variables son las sumas de las rigideces de los miembros individuales,

$$\frac{A(k)(E)}{L(k)} \quad \text{Para un miembro cargado axialmente,}$$

conectado a la unión. El sistema resultante de ecuaciones simultáneas, lineales, algebraicas es resuelto para los desplazamientos de la unión. Los desplazamientos del miembro se multiplican entonces por la rigidez del miembro para obtener las fuerzas interiores en cada miembro de la estructura. Para un miembro cargado axialmente conectando la unión  $i$  y con la unión  $j$ :

$$F(k) = (D(i) - D(j)) \frac{A(k)(E)}{L(k)}$$

Para que el método de análisis estructural sea aplicable en el campo de asignación del tráfico, los tres principios fundamentales deben ser equivalentes

## 1. Equilibrio:

En una red de calles, todos los viajes que dejan un origen nodo particular deben llegar al nodo del destino. En la estructura, la sumatoria de fuerzas verticales y reacciones de apoyo es igual a cero. La fuerza ascendente aplicado a la unión que corresponde al nodo del origen es equilibrado por una reacción descendente de la misma magnitud a la unión fija que corresponde al nodo del destino.

En una intersección callejera, el número de vehículos que entran en la intersección debe ser igual al número de vehículos que dejan la intersección. Si la unión que corresponde a la intersección callejera se aísla del resto de la estructura, la suma de las fuerzas ascendentes, en la unión es igual a la suma de las fuerzas descendentes en la unión.

Por consiguiente, el principio de equilibrio tiene el mismo significado esencialmente en el campo de asignación de tráfico como él que hace en el análisis estructural.

## 2. Propiedades de los materiales o conducta deformación-tensión:

Uno los requisitos fundamentales de cualquier técnica de asignación de tráfico es la asignación proporcional de pocos viajes a rutas con tiempos de viaje más largos. Como se demostró anteriormente, la fuerza interior en un miembro estructural de longitud  $L$  que esta compuesto de un material lineal-elástico con un módulo la elasticidad de  $E$  es proporcional a  $1 / L$ . La longitud del miembro estructural es equivalente al tiempo de viaje sobre el correspondiente eslabón en la red de la carretera. Por consiguiente, el uso de los resultados del modelo estructural lineal-elástico en comportamiento satisface el requisito de asignación de tráfico básica.

La fuerza interior en un miembro estructural lineal-elástico con una constante del área de sección transversal,  $(A)$ , es directamente proporcional a  $(A)(E)$ . El  $(A)(E)$  de un miembro estructural corresponde a el número de líneas de tráfico en una sección particular de carretera. Así aumentando el  $(A)(E)$  del miembro se incrementa su capacidad de transporte de carga, aumentando el número de líneas sobre una carretera incrementa la habilidad para llevar el tráfico. El análisis presentado en esta disertación hace que no se tenga en cuenta el hecho que las diferentes carreteras pueden tener diferente capacidad del transporte de tráfico. Por consiguiente, un valor de  $(A)(E) = 1$  se usa para todos los miembros en la estructura.

Sin embargo, no hay ninguna razón, para esperar que la disminución del tráfico será necesariamente proporcional a  $1 / L$ . Una manera de tomar esto en cuenta es asumir que la cantidad de tráfico en un eslabón es proporcional a  $1 / L^N$ . Si asumiera eso

$$F = D / L^N,$$

la expresión para la fuerza interior en Miembro 1 en la dos uniones / dos estructura del miembro se vuelve:

$$F(1) = \frac{D(1) - D(2)}{L(1)^N} = T \frac{\frac{1}{L(1)^N}}{\frac{1}{L(1)^N} + \frac{1}{L(2)^N}}$$

Si el Miembro 1 es el más corto de los dos miembros, si  $L(1) < L(2)$ , lleva una proporción más grande de la carga aplicada. La proporción de la carga llevada por el Miembro 1 aumenta en N incrementos. Usando un valor más grande de N para todos los miembros, el miembro más corto puede llevar la mayoría de la carga aplicada. Por ejemplo:

$$\text{Si } L(1) = (0.5) L(2) \text{ y } N = 1, \text{ entonces } F(1) = 0.667 T$$

$$\text{Si } L(1) = (0.5) L(2) \text{ y } N = 5, \text{ entonces } F(1) = 0.970 T$$

El mismo efecto puede lograrse usando valores diferentes de N para cada miembro.

Aumentando el valor de N para un miembro particular disminuye su resistencia a la deformación, disminuyendo su rigidez,  $(1 / L^N)$ . Esto reduce la fuerza interior en ese miembro y aumenta la fuerza interior en otros miembros. Por ejemplo:

$$\text{Si } L(1) = (0.5) L(2), N = 1 \text{ para Miembro 1 y } N = 3 \text{ para Miembro 2, entonces,} \\ F(1) = 0.952 T$$

Por consiguiente, el parámetro N en el método del análisis estructural modificado puede ser ajustado de una manera similar al parámetro  $\theta$  en el método estocástico de asignación tráfico para aumentar la proporción de tráfico llevada por los eslabones más cortos en la red.

Sin embargo, el uso de valores de N grandes puede causar problemas numéricos en la solución de sistemas grandes de ecuaciones simultáneas para una red compleja.

Aunque el parámetro N en el método del análisis estructural y el parámetro  $\theta$  en el método estocástico producen efectos similares en la asignación de viajes, hay mayor diferencia entre la manera que las dos técnicas manejan las diferencias de los tiempos de viajes de los diferentes eslabones. Para  $L(1) < L(2)$ , el método estocástico asigna menos tráfico para el eslabón 1 como la demora en el eslabón 2,  $LD(2) = L(2) - L(1)$ :

$$F(1) = T \frac{e^{-g(0)}}{e^{-g(0)} + e^{-g(L(2)-L(1))}}$$

Para un retraso constante de 2 minutos, el método estocástico asignaría la misma la cantidad de tráfico al eslabón 1 para un viaje de 5 minutos como para un viaje de 100 minutos

El método del análisis estructural determina el tráfico del eslabón 1 de acuerdo a la siguiente relación:

$$F(1) = T \frac{\frac{1}{L(1)}}{\frac{1}{L(1)} + \frac{1}{L(2)}}$$

Para el mismo retraso de dos minutos, el método del análisis estructural asigna más tráfico al eslabón 1 para un viaje de 10 minutos que para el viaje del 100 minutos. Un retraso de 2 minutos

debe tener más efecto en la selección de una ruta para un viaje de 5 minutos del que se hace para un viaje de 100 minutos. Por ejemplo:

Si  $L(1) = 5$ ,  $L(2) = 5 + 2 = 7$  y  $N = 1$ , entonces,

$F(1)$  Análisis estructural = 0.583 T

Si  $L(1) = 100$ ,  $L(2) = 100 + 2 = 102$  y  $N = 1$ , entonces,

$F(1)$  Análisis estructural = 0.505 T

En ambos casos,  $LD(2) = L(1) - L(2) = 2$ .

Si  $LD(2) = 2$  y  $\gamma = 0.2$ , entonces,

$F(1)$  Estocástico = 0.599 T

No hay ninguna razón para esperar que la disminución en el tráfico en los eslabones más cortos sean necesariamente proporcionales a  $1 / L^N$ . Alguna otra función de tiempo de viaje puede modelar con más precisión la conducta de los conductores. En el método estocástico de asignación de tráfico, la expresión para el tráfico llevado por Eslabón 1 es:

$$F(1) = T \frac{p(1)}{p(1) + p(2)}$$

Donde:

$$p(k) = e^{-\theta(PD(1))}$$

La siguiente expresión para el trafico del eslabón 1 desde el método del análisis estructural es el mismo que la ecuación estocástica, si el  $1 / L(K)^N$  se reemplaza con  $p(k)$ .

$$F(1) = T \frac{\frac{1}{L(1)^N}}{\frac{1}{L(1)^N} + \frac{1}{L(2)^N}}$$

Por consiguiente para redes de dos-nodos / dos-eslabones, la asignación de dos métodos de trafico multi-carril, son fundamentales, sólo difiriendo en la función que relaciona la cantidad de viaje hechos con la longitud del camino.

La similitud entre estas expresiones sugiere una similitud entre  $p(k)$ , la probabilidad relativa de utilizar el camino  $k$  ésimo, y  $1 / L(k)^N$  donde  $L(k)$  es la longitud del camino  $k$  ésimo. Como el retraso total para un camino particular aumenta, el número de viajes en este camino disminuye. Como la longitud de un camino particular aumenta, el número de viajes en ese camino también decrece de manera similar

---

**La compatibilidad-continuidad:**

El principio de compatibilidad-continuidad no hace permitir a los miembros ser desconectados de las uniones de la estructura. Los extremos de todos los miembros conectados a una unión particular deben sufrir el mismo desplazamiento con la unión por consiguiente, y debe llevar un poco de fuerza interior.

En el dominio del análisis de tráfico, esto es equivalente a decir que todos los eslabones conectados a un nodo particular deben llevar igual tráfico. La aplicación estricta del principio de la compatibilidad-continuidad para la asignación del tráfico, evita la situación en que todos los viajes que entren en una intersección sobre un eslabón, terminen en otro, dejando algunos eslabones inutilizados.

Obviamente, esta situación puede y ocurre en el mundo real.

#### 4.16 MODELO DE EQUILIBRIO OFERTA – DEMANDA. ESTRAUS<sup>22</sup>

"Estudio de Evaluación y Desarrollo del Sistema de Transporte Urbano de Santiago (ESTRAUS)"

Tipo: Integral

##### DEFINICIONES E HIPÓTESIS BÁSICAS DEL MODELO

##### Redes y Funciones de Costos

La red vial está representada por  $G(N, A)$ , donde  $N$  es el conjunto de nodos y  $A$  el conjunto de arcos. Se define  $c_a^{kpm}$  al costo medio de operación en el arco  $a$  para usuarios de clase  $k$ , con propósito de viaje  $p$ , del modo de transporte privado  $\tilde{m}$  (por ejemplo automóvil, taxi, etc.), como una función de la suma de los flujos vehiculares de usuarios de todos los modos de transporte privado, de todas las categorías de usuarios y propósitos de viaje ( $f_a^{kpm}$ ) y del flujo fijo de vehículos de transporte público ( $\bar{F}_a$ ), en vehículos equivalentes, para el arco  $a$ :

$$c_a^{kpm} = c_a^{kpm} \left( \sum_k \sum_p \sum_{\tilde{m}} f_a^{kpm}, \bar{F}_a \right) \quad (4.16.1)$$

Es importante notar que, aunque el Jacobiano del vector de funciones de costo es no diagonal, dada la forma supuesta para las funciones  $c_a^{kpm}$ , éste resulta ser simétrico (todos los vehículos, cualquiera sea la categoría de usuarios, el propósito del viaje y el modo de transporte privado, producen igual impacto en la congestión).

Para cada modo puro  $\bar{m}$  de transporte público, se definen redes puras de  $G_{\bar{m}}(N_{\bar{m}}, S_{\bar{m}})$ , donde  $N_{\bar{m}}$  es el conjunto de nodos ( $N_{\bar{m}} = N$  para servicios de superficie que usan la red vial, tales como buses y taxicolectivos, y  $N_{\bar{m}} = N'$ , con  $N \cap N' = \emptyset$  para redes de transporte público independiente, como el metro) y  $S_{\bar{m}}$  el conjunto de *arcos de transporte público* para el modo  $\bar{m}$ . A continuación se explica el concepto de *arco de transporte público*, que es básico para entender cómo se considera la restricción de capacidad de los vehículos.

Considérense dos nodos  $A$  y  $B$  tales que existe un conjunto  $L_1$  de servicios de transporte público que permiten llegar a  $B$  desde  $A$ , sin realizar transbordos ( $L_1 = \{l_1, l_2, l_3, \dots, l_n\}$ ). Esto es, entre  $A$  y  $B$  opera un conjunto de *secciones de línea* (tramo de una línea entre dos nodos no necesariamente consecutivos de su trazado), como se observa en la siguiente figura:

<sup>22</sup> Estraus: un Modelo de Equilibrio Oferta-Demanda para Redes Multimodales de Transporte Urbano con Múltiples Clases de Usuarios. Joaquín de Cea Ch. J. Enrique Fernández Larrañaga.

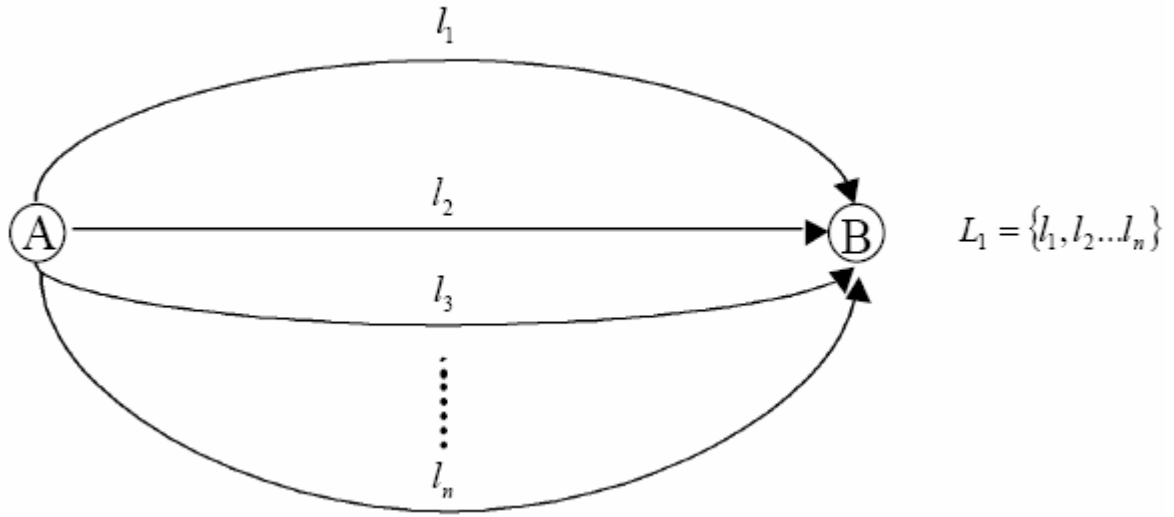


Figura 4.16.1. Secciones de Línea entre Dos Nodos

Para representar el hecho que los viajeros seleccionan un subconjunto de las líneas de  $L_1$  (subconjunto de líneas *atractivas*) para desplazarse desde A a B, y al mismo tiempo tomar en cuenta la restricción de capacidad de los vehículos, la situación anterior se modela de la siguiente forma:

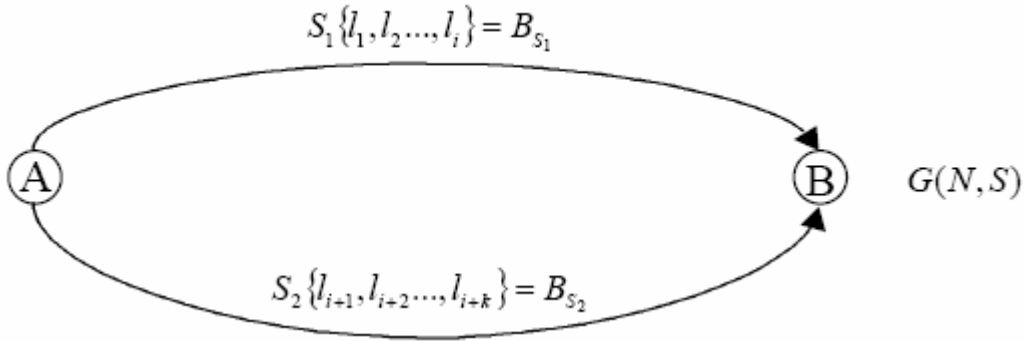


Figura 4.16.2. Arcos de Transporte Público Red  $G(N, S)$

El primer *arco de transporte público*,  $S_1$ , representa el conjunto de *líneas rápidas*,  $B_{S1}$ , y corresponde al conjunto de líneas que permite minimizar el tiempo (costo) generalizado de viaje sin considerar restricción de capacidad de los vehículos. El segundo arco de transporte público,  $S_2$ , representa el conjunto de *líneas lentas*,  $B_{S2}$ .

Las funciones de tiempo (costo) generalizado de estos arcos de transporte público (suma del tiempo de viaje, tiempo de espera, tiempo de trasbordo, tarifa, etc.), son dependientes de los flujos de vehículos sobre la red vial y de pasajeros sobre los servicios existentes, como se muestra a continuación:

$$c_s^{kpm} = \varphi^{kpm} \left( \sum_k \sum_p \sum_{\bar{m}} f_a^{kpm}, \bar{F}_a, \forall a \in l, l \in B_{s_{\bar{m}}} \right) + (P_{TAR})^{kpm} \cdot (TAR)_s^{\bar{m}} +$$



$$+ (P_{WAIT})^{kpm} \left[ \frac{\alpha^{\bar{m}}}{d_s^{\bar{m}}} + \beta^{\bar{m}} \left( \frac{V_s^{kpm} + \tilde{V}_s^{kpm}}{(CAP)_s^{\bar{m}}} \right)^{n^{\bar{m}}} \right] \quad (4.16.2)$$

Donde:

$c_s^{kpm}$  = costo medio o generalizado en el arco  $s$  para usuarios de clase  $k$ , con propósito  $p$ , del modo de transporte público  $\bar{m}$  (por ejemplo bus, metro, taxicolectivo, etc.).

$(P_{TAR})^{kpm}$  = ponderador de la tarifa para usuarios de clase  $k$ , con propósito de viaje  $p$ , del modo de transporte público  $\bar{m}$ .

$(TAR)_s^{\bar{m}}$  = tarifa asociada al arco de transporte público  $s$  para el modo  $\bar{m}$ .

$(P_{WAIT})^{kpm}$  = ponderador del tiempo de espera para usuarios de clase  $k$ , con propósito de viaje  $p$ , del modo de transporte público  $\bar{m}$ .

$\alpha^{\bar{m}}, \beta^{\bar{m}}, n^{\bar{m}}$  = parámetros de calibración de la función de tiempo de espera para el  $\bar{m}$ .

$d_s^{\bar{m}}$  = frecuencia de vehículos del modo de transporte público  $m$  sobre el arco de transporte público  $s$ .

$(CAP)_s^{\bar{m}}$  = capacidad del arco de transporte público  $s$  para el modo de transporte público  $\bar{m}$ .

$V_s^{kpm}$  = flujo de pasajeros de clase  $k$ , con propósito de viaje  $p$ , pertenecientes al modo de transporte público  $\bar{m}$ , que usan el arco de transporte público  $s$ .

$\tilde{V}_s^{kpm}$  = flujo de pasajeros que compite con  $V_s^{kpm}$  por la capacidad de las líneas de  $B_s$  (flujos correspondientes al mismo propósito, categoría, modo, pertenecientes a otros arcos de transporte público que compiten o quitan capacidad de las líneas de  $B_s$ , más flujos de otros propósitos, categorías y modos que también compiten por la capacidad de las  $B_s$ ).

El modelo considera, además, la existencia de modos combinados, por ejemplo auto-metro (transporte privado - transporte público) o bus-metro (transporte público - transporte público).

En cada caso, la red del modo combinado corresponde a la unión de las redes de los modos puros que las conforman. Sólo para hacer menos engorrosa la notación y favorecer la comprensión de la formulación que sigue, se considerarán modos combinados ( $m^c$ ) formados por dos modos de transporte público. Sin embargo, es necesario recalcar que esto no resta generalidad al modelo, ya que no hay problemas por tratar combinaciones auto-transporte público.

### Condiciones de Equilibrio

**Equilibrio de Flujos.** El supuesto básico del modelo, respecto del equilibrio de flujos en las redes, es que para cada modo, sobre su respectiva red, cada usuario elige su ruta de acuerdo al *primer principio de Wardrop* (cada individuo trata de minimizar su costo de operación o costo medio generalizado de viaje). Esto da lugar a las siguientes condiciones de equilibrio:

$$C_r^{kpm*} - u_w^{kpm*} \begin{cases} = 0 & \text{si } h_r^{kpm*} > 0 \\ \geq 0 & \text{si } h_r^{kpm*} = 0 \end{cases} ; \quad \forall r \in P_w^m, w \in W, k, p \quad (4.16.3)$$

Lo anterior significa que las rutas con flujos, tienen costos iguales mientras aquellas que no tienen flujos presentan costos iguales o mayores que el costo mínimo  $U_w^{kpm*}$ . Además,  $P_w^m$  es el conjunto de rutas entre el par  $w$  para el modo  $m$ .

**Equilibrio de Viajes.** Antes de explicitar las condiciones de equilibrio para la demanda, la siguiente figura ilustra una rama del árbol de decisión para un par origen-destino  $w$  dado, una clase de usuario  $k$  y un propósito de viaje  $p$ . Desde el nivel más alto del árbol de decisión *cuelgan*, tantas ramas equivalentes a la representada en la figura, como combinaciones de pares origen-destino  $w$ , clases de usuario  $k$  y propósitos de viaje  $p$ , existan. En el nivel superior de la rama en la figura, están representadas las decisiones de destino por propósito de viaje y clase de usuario, y en el nivel inferior (en realidad en los dos niveles inferiores) las decisiones de modo en una estructura logit de dos niveles.

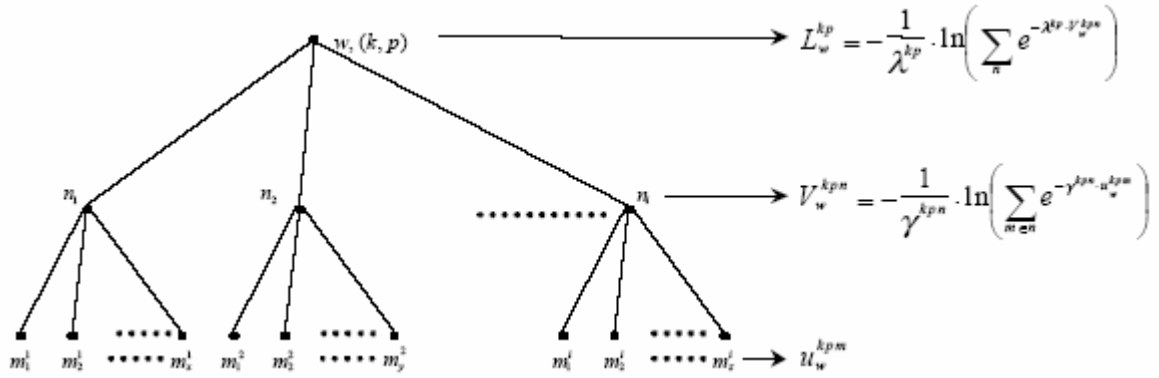


Figura 4.16.3. Ilustración del Árbol de Decisión del Modelo de Demanda

En cada nivel del árbol se muestra la función de utilidad (desutilidad) correspondiente. En el nivel inferior, cada modo  $m$  tiene asociada una desutilidad  $U_w^{kpm}$  (costo de viaje entre el par  $w$  para usuarios de clase  $k$ , propósito  $p$  y modo de transporte  $m$ ). El conjunto de modos está agrupado en diferentes nidos (partición modal con estructura jerárquica de dos niveles), con desutilidad  $V_w^{kpn}$ . El nivel superior es el correspondiente a la elección de destino, con costos compuestos  $L_w^{kp}$ . En el equilibrio debe cumplirse lo siguiente:

- ✓ Distribución

$$T_w^{kps*} = A_i^{kp} O_i^{kp} B_j^p D_j^p e^{-\beta^{kp} \cdot L_w^{kp*}} \quad (4.16.4)$$

- ✓ Proporción de viajes de un modo  $m$  dentro de un nido  $n$

$$P_w^{kpm*} = \frac{T_w^{kpm*}}{T_w^{kpn*}} = \frac{e^{-\gamma^{kpn} U_w^{kpm*}}}{\sum_{m' \in n} e^{-\gamma^{kpn} U_w^{kpm'*}}} \quad (4.16.5)$$

- ✓ Proporción de viajes en nido  $n$  respecto del total de viaje

$$P_w^{kpn^*} = \frac{T_w^{kpn^*}}{T_w^{kpn^*}} = \frac{e^{-\lambda^{kp} V_w^{kpn^*}}}{\sum_{n'} e^{-\lambda^{kp} V_w^{kpn^*}}} \quad (4.16.6)$$

#### FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL MODELO

Las condiciones de equilibrio (4.16.3) a (4.16.6) pueden formularse también mediante una desigualdad variacional del siguiente tipo:

$$c(X^*)^T (X - X^*) - g(T^*)^T (T - T^*) \geq 0, \quad \forall X, T \text{ Factibles} \quad (P-1)$$

Donde:

$X$  = vector de flujos sobre los arcos de la red multimodal.

$X^*$  = vector de flujos de equilibrio sobre los arcos de la red multimodal.

$T$  = vector de viajes entre pares origen-destino de la red multimodal.

$T^*$  = vector de viajes de equilibrio entre pares origen-destino de la red multimodal.

$c(X)$  = vector columna de funciones de costo en los arcos de la red (con Jacobiano no diagonal y asimétrico).

$g(T)$  = vector de funciones inversas de demanda (con Jacobiano diagonal).

#### ALGORITMO DE SOLUCIÓN

Como se ha mencionado en la sección “redes y funciones de costo” las funciones de costo en los arcos de transporte público son asimétricas (Jacobiano del vector de funciones de costo asimétrico).

Por lo tanto, no existe un problema de optimización equivalente al problema variacional P-1.

Para resolver este problema se puede utilizar el algoritmo de planos cortantes propuesto por Nguyen y Dupuis (1984) o cualquier otro método de solución de desigualdades variacionales, ESTRASUS usa el de diagonalización, que es uno de los métodos más utilizados para resolver problemas de este tipo.

La diagonalización de las funciones de costo  $c_s^{kpm}$  da lugar a funciones  $\hat{c}_s^{kpm}$  dependientes de su propio flujo  $\left(\hat{c}_s^{kpm} = \hat{c}_s^{kpm}(V_s^{kpm})\right)$ . A continuación se presenta el problema de optimización equivalente para el problema diagonalizado:

$$\begin{aligned}
 \min Z = & \sum_k \sum_p \sum_{\bar{m}} \sum_a \int_0^{f_a^{kp\bar{m}}} c_a^{kp\bar{m}}(x) dx + \sum_k \sum_p \sum_{\bar{m}} \sum_s \int_0^{V_s^{kp\bar{m}}} \hat{c}_s^{kp\bar{m}}(x) dx \\
 & + \sum_k \sum_p \sum_{m^c} \sum_s \int_0^{V_s^{kp m^c}} \hat{c}_s^{kp m^c}(x) dx \\
 & + \sum_k \sum_p \frac{1}{\beta^{kp}} \sum_w T_w^{kp} (\ln T_w^{kp} - 1) - \sum_k \sum_p \frac{1}{\lambda^{kp}} \sum_w T_w^{kp} (\ln T_w^{kp} - 1) \\
 & + \sum_k \sum_p \sum_n \frac{1}{\lambda^{kp n}} \sum_w T_w^{kp n} (\ln T_w^{kp n} - 1) - \sum_k \sum_p \sum_n \frac{1}{\gamma^{kp n}} \sum_w T_w^{kp n} (\ln T_w^{kp n} - 1) \\
 & + \sum_k \sum_p \sum_n \frac{1}{\gamma^{kp n}} \sum_{m \in n} \sum_w T_w^{kp m} (\ln T_w^{kp m} - 1)
 \end{aligned} \tag{4.16.7}$$

s.a.:

$$T_w^{kp} = \sum_n T_w^{kp n}, \quad \forall w, k, p \quad \left( u_w^{kp} \right) \tag{4.16.8}$$

$$T_w^{kp n} = \sum_{m \in n} T_w^{kp m}, \quad \forall w, k, p, n \quad \left( u_w^{kp n} \right) \tag{4.16.9}$$

$$T_w^{kp m} = \sum_{r \in P_w^{m^c}} h_r^{kp m}, \quad \forall w, k, p, m \quad \left( u_w^{kp m} \right) \tag{4.16.10}$$

$$O_i^{kp} = \sum_j T_w^{kp}, \quad \forall i, k, p \quad \left( \mu_w^{kp} \right) \tag{4.16.11}$$

$$D_j^p = \sum_k \sum_i T_w^{kp}, \quad \forall j, p \quad \left( \eta_j^p \right) \tag{4.16.12}$$

A las restricciones (4.16.8) - (4.16.12) deben agregarse además las restricciones de no negatividad de flujos, las relaciones entre flujos en rutas y flujos en arcos, y las restricciones de repartición de flujos en arcos de transporte público a secciones de línea.

Es fácil ver que, si la distribución y la partición modal se dan a un mismo nivel  $(\beta^{kp} = \lambda^{kp})$ , el cuarto y quinto término de la función objetivo (4.16.7) desaparecen. Por otra parte, si además el modelo de partición modal, en lugar de ser jerárquico, fuera un logit multinomial, desaparecerían también el sexto y séptimo término de (4.16.7). Así, la versión general correspondiente a la estructura de decisiones ilustrada en la Figura 4.16.3, colapsa a estructuras más simples dependiendo de los valores de calibración de los parámetros  $\beta^{kp}$ ,  $\lambda^{kp}$  y  $\gamma^{kp n}$ .

## 5. NUEVAS APLICACIONES

### 5.1 REDES NEURONALES<sup>23</sup>

Los sistemas neuronales artificiales pueden ser considerados como modelos matemáticos simplificados similares a los sistemas del cerebro.

Sin embargo, en contraste con computadoras convencionales que se programan para realizar una tarea específica, la mayoría de las redes neuronales deben ser adiestradas o entrenadas. Ellas pueden aprender nuevas asociaciones, nuevas dependencias funcionales y nuevos modelos. Los sistemas neuronales artificiales representan la promesa de la nueva generación de información que procesa las redes.

Definición: los sistemas neuronales Artificiales, o redes neuronales, son sistemas físicos celulares que pueden adquirir, guardar, y utilizar el conocimiento experimental.

El conocimiento está en forma de formularios o cartografías que están incrustados en las redes y estos pueden ser llamados por la presentación de señales

Los elementos de procesamiento básicos de las redes neuronales son llamados neuronas artificiales, o simplemente neuronas o nodos. Cada unidad de procesamiento es caracterizada por un nivel de actividad (representando el estado de polarización de una neurona), un valor de salida (representando la proporción de encendido de la neurona), un juego de conexiones de entrada, (representando sinapsis sobre la célula y su dendrita), un valor de predisposición (representando un nivel de descanso en la neurona), y un juego de conexiones salientes (representando las proyecciones accionales de la neurona). Cada uno de estos aspectos de la unidad se representa matemáticamente con números reales. Así, cada conexión tiene un peso asociado (fuerza sináptica) que determina el efecto del consumo entrante sobre el nivel de activación de la unidad. Los pesos pueden ser positivos (excitador) o negativo (inhibitorio).

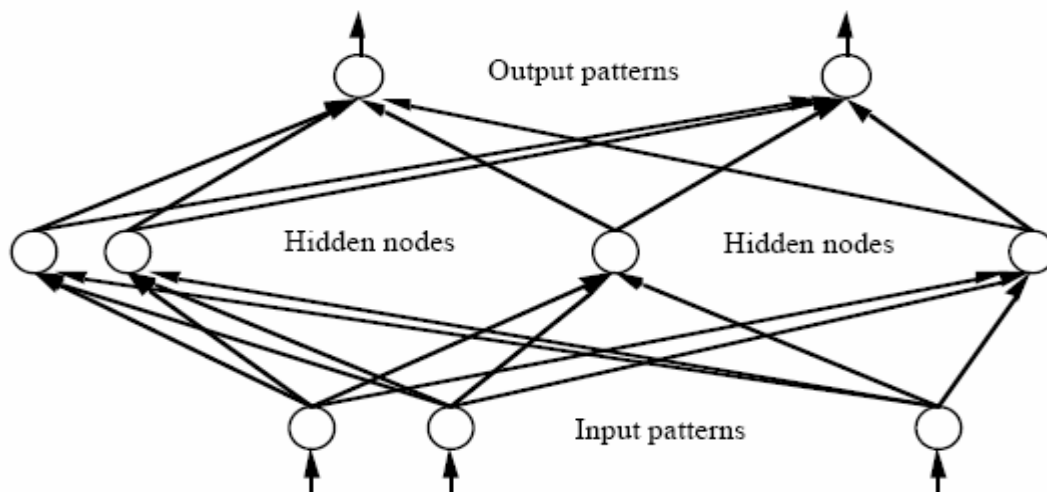


Figura 5.1.1: Red neuronal multicapa de alimentación hacia delante.

<sup>23</sup> Fuzzy logic and neural nets in intelligent systems. Robert Fuller,  
fuller@ra.abo.fi, [www.abo.fi/~rfuller/robert.html](http://www.abo.fi/~rfuller/robert.html).

El flujo señalado desde la entrada de la neurona,  $X_j$ , se considera que es unidireccional como es indicado por las flechas, como es señal del flujo de salida de la neurona, esta se da por la siguiente relación:

$$o = f(< w, x >) = f(w^T x) = f\left(\sum_{j=1}^n w_j x_j\right)$$

Donde  $w = (w_1, \dots, w_n)^T \in \mathbf{R}^n$  es el vector de peso.

La función  $f(w^T x)$  es a menudo referida como una función de activación. Su dominio es el juego de valores de activación,  $net$ , del modelo neuronal, se usa a menudo esta función como  $f(net)$ . La variable  $net$  es definida como un producto escalar entre el peso y los vectores de entrada desde las otras celdas en la red

$$net = < w, x > = w^T x = w_1 x_1 + \dots + w_n x_n$$

Y en el caso más simple el valor de salida  $o$  se computa como:

$$o = f(net) = \begin{cases} 1 & \text{if } w^T x \geq \theta \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

Donde  $\theta$  es llamado umbral y este tipo de nodo se llama umbral lineal de la unidad.

La dificultad de aprendizaje en las redes neuronales es simplemente el problema de encontrar un juego de fuerzas de conexión (pesos) que permitan a la red llevar a cabo los cómputos que deseamos.

La red esta proporcionada con un juego de ejemplo de pares de entrada y salida (es decir un juego de entrenamiento) y estas conexiones están para ser modificadas en el orden de aproximación de la función desde que los pares de entrada y salida han sido dibujados. Las redes se prueban entonces para la habilidad de generalizar.

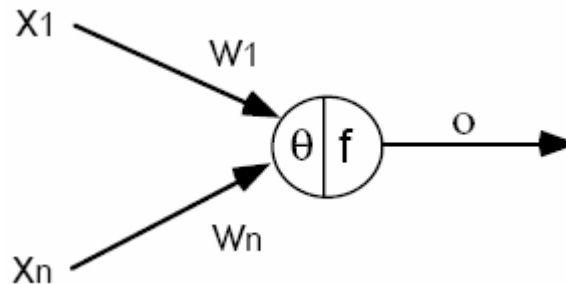


Figura 5.1.2: Un elemento del proceso con la sola conexión del rendimiento.

La corrección del error que aprende el procedimiento es bastante simple en su concepción. El procedimiento es así: Durante el entrenamiento una entrada es puesta en la red y flujos la atraviesan

generando un juego de valores sobre las unidades de salida. Entonces, la salida real se compara con el objetivo deseado, y el resultado es computado. Si el resultado y el objetivo coinciden, no se hicieron cambios en la red, sin embargo si el resultado difiere del objetivo un cambio debió ser realizado por alguna de las conexiones.

Suponga que nosotros estamos dando una red de una solo-capa con  $n$  unidades de entrada y  $m$  resultados de salidas lineales, es decir, el resultado del  $i$ -esima la neurona puede escribirse como

$$o_i = net_i = \langle w_i, x \rangle = w_{i1}x_1 + \dots + w_{in}x_n, i = 1, \dots, m.$$

Asuma que nosotros tenemos el siguiente juego de entrenamiento:

$$\{(x^1, y^1), \dots, (x^K, y^K)\}$$

Donde  $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$ ,  $y^k = (y_1^k, \dots, y_m^k)$ ,  $k = 1, \dots, K$ .

La idea básica de la regla de aprendizaje delta es definir una medida del desempeño global del sistema y entonces encontrar una manera de perfeccionar ese desempeño. En nuestra red podemos definir el desempeño del sistema como:

$$E = \sum_{k=1}^K E_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \|y^k - o^k\|^2$$

Esto es:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^m (y_i^k - o_i^k)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^m (y_i^k - \langle w_i, x^k \rangle)^2$$

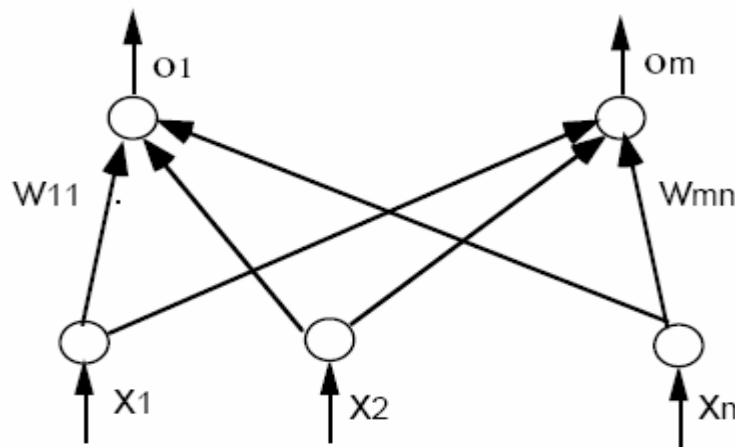


Figura 5.1.3: Capa sencilla con sistema de redes de alimentación hacia delante con  $m$  unidades de salida.

Donde:  $i$ : índice de las unidades de salida;  $k$  índices de entrada y salida que han sido aprendidos;  
 $y_i^k$  : indica el objetivo para una unidad de salida en particular en un modelo particular;

$$o_i^k := \langle w_i, x^k \rangle$$

Indica el rendimiento real para esa unidad en ese modelo; y  $E$  es el error total del sistema. La meta, entonces, es minimizar esta función. Nosotros podemos asignar una unidad de reprobación en particular en proporción al grado en los cambios de esa unidad, para dejar los resultados de error. Resulta, que si las funciones de salida son diferenciables, el problema tiene una simple solución: nosotros cambiamos los pesos del sistema en proporción a la derivada del error con respecto a los pesos

La regla para cambiar pesos lleva a cabo una presentación de par de entrada/salida:  $(x^k, y^k)$ , esta da por el método de gradiente descendiente, es decir, se minimiza la función del error cuadrático usando el proceso de la iteración siguiente:

$$w_{ij} := w_{ij} - \eta \frac{\partial E_k}{\partial w_{ij}}$$

Donde:  $\eta > 0$  es la proporción de aprendizaje.

Este tipo de modelo es aplicado a regulación de las intersecciones de tráfico urbanas, modelos de generación de viajes.

Cuando arriba hablamos de datos de entrada, por ejemplo, podemos decir que son variables demográficas y socioeconómicas, y cuando hablamos de datos de salida los podemos asociar a desplazamientos totales y mecanizados por familia, en el caso que el modelo se utilice para modelos de generación de viajes, es decir el modelo se adapta a los requerimientos que tengamos.



## 5.2 LÓGICA DIFUSA<sup>24</sup>

Los sistemas difusos fueron introducidos por Zadeh como los medios de representar y de manipular los datos que no eran exactos, pero algo difusos. En el sistema de la teoría clásica, un subconjunto A de un sistema X se puede definir por esta función de característica  $X_A : X \rightarrow \{0,1\}$ .

Esta asignación se puede representar como sistema de pares ordenados, con exactamente un par ordenado presente para cada elemento de X. Este primer elemento del par ordenado es un elemento del sistema X, y el segundo elemento es un elemento del sistema  $\{0, 1\}$ . El valor cero se utiliza para representar la no-membresía, y el valor uno se utiliza para representar la membresía. La verdad o la falsedad de la declaración "x está en A" es determinada por el par ordenado  $(x, X_A(x))$ . La declaración es verdad si el segundo elemento del par ordenado es 1, y la declaración es falsa si es 0.

Similarmente, un subconjunto difuso A de un sistema X se puede definir como sistema de pares ordenados, cada uno con el primer elemento de X, y el segundo elemento del intervalo  $[0, 1]$ , con exactamente un par ordenado presente para cada elemento de X. Esto define una asignación  $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ . El valor cero se utiliza para representar la no completa membresía, el valor uno se utiliza para representar la completa membresía, y los valores entre estos son usados para representar los grados intermedios de membresía, frecuentemente la asignación  $\mu_A$  es descrita como una función, la función de membresía de A.

El grado para que el estado "x está en A" sea verdadera esta determinada por el orden de pares encontrados  $(x, \mu_A(x))$ . El grado de verdad del estado es el segundo elemento del par pedido.

Definición: Dejó X ser un sistema no vacío. Un sistema difuso A en X es caracterizado por su función de membresía:

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$$

y  $\mu_A(x)$  se interpreta como el grado membresía del elemento x en el sistema difuso A para cada  $x \in X$ . Frecuentemente escribimos simplemente  $A(x)$  en lugar de  $\mu_A(x)$ . La familia de todos los subsistemas difusos en X son denotados por  $F(X)$ .

Usando la teoría de subconjuntos difusos podemos representar números difusos como subconjuntos difusos del sistema de números verdaderos. Un número difuso triangular A con el centro  $\alpha$  se define como:

<sup>24</sup> Fuzzy logic and neural nets in intelligent systems. Robert Fuller,  
rfuller@ra.abo.fi, [www.abo.fi/~rfuller/robert.html](http://www.abo.fi/~rfuller/robert.html).

$$A(t) = \begin{cases} 1 - \frac{a-t}{\alpha} & \text{if } a - \alpha \leq t \leq a \\ 1 - \frac{t-a}{\beta} & \text{if } a \leq t \leq a + \beta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

y puede ser visto como una cantidad difusa "x es aproximadamente igual a".

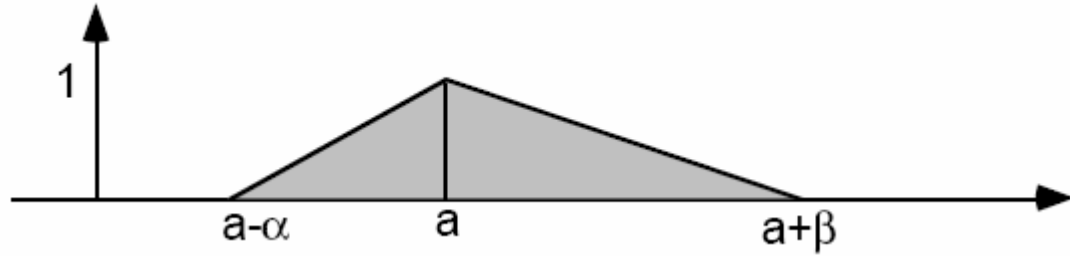


Figura 5.2.1. Numero triangular difuso.

Un número trapezoidal difuso A, es definido como:

$$A(t) = \begin{cases} 1 - \frac{a-t}{\alpha} & \text{if } a - \alpha \leq t \leq a \\ 1 & \text{if } a \leq t \leq b \\ 1 - \frac{t-b}{\beta} & \text{if } a \leq t \leq b + \beta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

y puede ser visto como una cantidad difusa "X esta aproximadamente en el intervalo [a, b]"

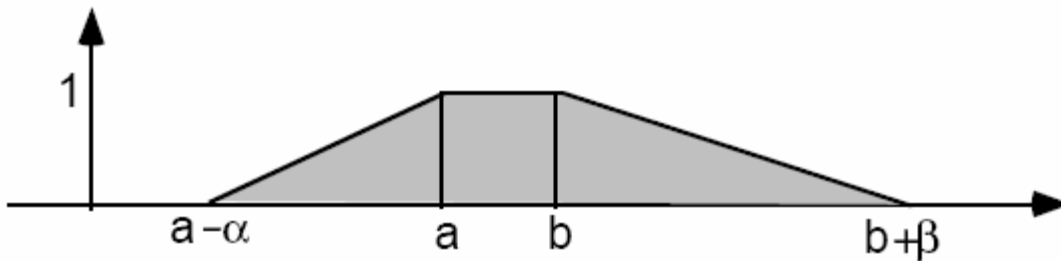


Figura 5.2.2. Número trapezoidal difuso

El uso de sistemas difusos proporciona una base para de una manera sistemática manipular conceptos vagos e imprecisos. En detalle, podemos emplear sistemas difusos para representar variables lingüísticas.

Una variable lingüística cualquiera puede ser considerada como una variable cuyo valor es un número difuso o como una variable cuyo valor esta definido en términos lingüísticos.

Definición: La variable lingüística es caracterizada por un quintuplo

$$(x, T(x), U, G, M)$$

Donde  $x$  es el nombre de la variable;  $T(x)$  es el sistema de  $x$ , es decir, el sistema de nombres de valores lingüísticos de  $x$  con cada valor siendo un número difuso definido en  $U$ ;  $G$  es una regla sintáctica para generar los nombres de valores de  $x$ ; y  $M$  es una regla semántica para asociar a cada valor su significado.

Por ejemplo, si la velocidad se interpreta como variable lingüística, entonces su término de conjunto  $T$  (velocidad) podría ser = {lento, moderado, rápido, muy lento, más o menos rápido, sigilosamente lento. . .}

Donde cada término  $T$  (velocidad) es caracterizado por un sistema difuso en un universo del discontinuo  $U = [0, 100]$ .

Podemos interpretar

Lento como "velocidad cerca o debajo de 40 MPH"

Moderado como "velocidad cerca de 55 MPH"

Rápido como "velocidad cerca a 70 MPH"

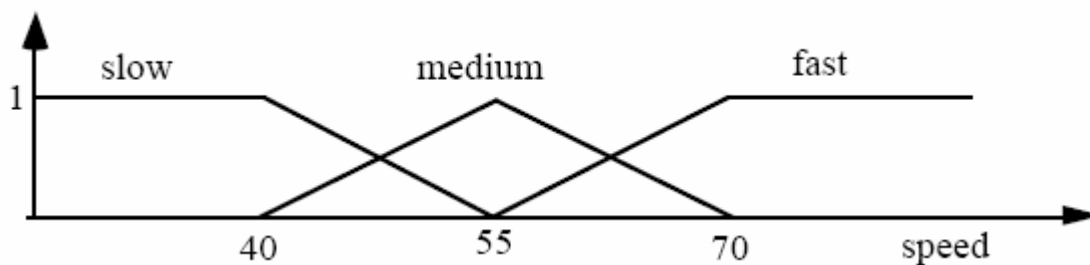


Figura 5.2.3 Valores de una variable lingüista de velocidad.

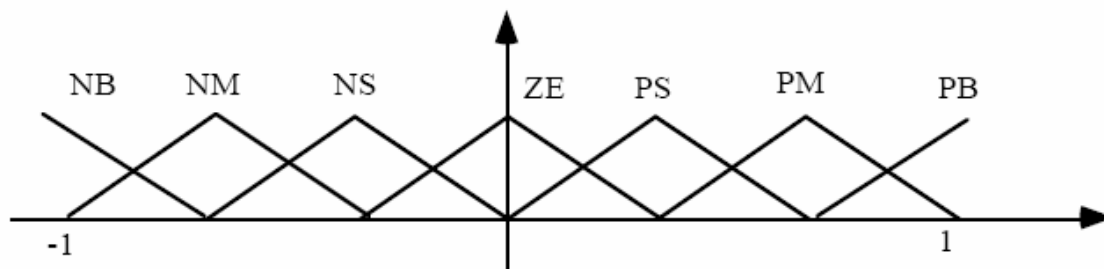


Figura 5.2.4. Usual división difusa de  $[-1, 1]$

En muchas aplicaciones prácticas normalizamos el dominio de entradas y utilizamos el siguiente tipo de partición difusa (véase el Figura 5.2.4): NB (Grande Negativo), NM (Medio Negativo), NS (Pequeño Negativo), ZE (Cero), PS (Pequeño Positivo), PM. (Medio Positivo), PB (Grande Positivo).

## *APLICACIONES ESPECÍFICAS*

### LÓGICA DIFUSA EN EL TRÁFICO.<sup>25</sup>

Esta Interviene en muchos fenómenos del sistemas de tráfico; la ruta que escoge un conductor, manejo del trafico, casi siempre resultan de decisiones subjetivas.

Dependiendo del contexto del problema, los datos de entrada básicos se necesitan para tomar estas decisiones incluidas el tiempo de recorrido, costo del recorrido, la duración de la congestión, la distancia y velocidad a un vehículo precedente, grado del paisaje, etc.

Algunas de estas cantidades son típicamente inconstantes, mientras que otras son intrínsecamente vagas y se pueden describir lo mejor posible usando variables lingüísticas.

En algunas situaciones, los datos de entrada exactos están disponibles para el tomador de decisiones. Si se asume que este esta presente en un modelo adecuado, soluciones satisfactorias pueden ser esperadas de los resultados. Sin embargo, en la mayoría de las situaciones, los datos de entrada exactos no están disponibles: es decir, la incertidumbre, la imprecisión y la ambigüedad rodea los datos de entrada.

Por otra parte, con frecuencia, una decisión no se basa en el razonamiento objetivo, sino en una decisión procedente de la experiencia.

Esta evaluación subjetiva variará a través de los diversos agentes relevantes de los fenómenos considerados, debido a las capacidades limitadas del tratamiento de la información de los agentes (imprecisión de la información), y a la imprecisión inherente en la opinión de diversas cualidades (imprecisión intrínseca).

Por ejemplo, Lo que un conductor percibe como viaje corto otro lo puede percibir como un viaje bastante largo. Por lo tanto, una gama grande de problemas en el campo de la ingeniería del tráfico es caracterizada por las variables que son inciertas, subjetivas, imprecisas y ambiguas.

Tradicionalmente, el campo de la investigación de la ingeniería del tráfico ha sufrido de la carencia de las herramientas analíticas convenientes que pueden ocuparse de la imprecisión en la opinión humana y en el proceso de toma de decisión.

Incluso si los modelos de aproximaciones tradicionales son principalmente capaces de capturar las características de la mayoría de los procesos en forma adecuada, en un número de casos el costo del desarrollo de modelos complejos, incorpora mecánicos complicados a este, que lo hacen enorme.

---

<sup>25</sup> Fuzzy perspectives in traffic engineering. Serge Hoogendoorn. Delft University of Technology. Faculty of Civil Engineering and Geosciences, Transportation and Traffic Engineering section  
Stevinweg 1 – P.O. Box 5048, NL-2600 GA Delft, The Netherlands

### ACCIDENTALIDAD<sup>26</sup>

Los Análisis probabilísticos y algoritmos neurodifusos son usados como uno de los desarrollos destacados en cuanto a la detención anticipada de posibles sitios peligrosos en las vías, donde a partir del modelo tridimensional de esta y el patronado del comportamiento del vehiculo se predicen las posibles trayectorias y por tanto se identifican sitios característicos encontrándose experimentalmente una alta efectividad de los algoritmos propuestos.

Con la lógica difusa se hacen desarrollos constantes en lo referente a la mejora de los vehículos, en lo que concierne a la adecuación y diseño, para de esta manera lograr un mejor comportamiento, más seguridad, más confiabilidad y velocidad.

Se han realizado interesantes desarrollos de aprendizaje utilizando redes neuronales y neurodifusas para la simulación y predicción de daños sobre los vehículos y lesiones en los conductores, que determinan la severidad de lesiones en conductores cuando ocurre un accidente, fundamentalmente influenciado por el uso del cinturón de seguridad, la velocidad del vehiculo, el punto de impacto y otros.

### PROGRAMACIÓN DE RUTAS

Se ha utilizado la lógica difusa para mejorar los procesos de despacho de vehículos de transporte publico a partir de la calificación del cumplimiento del horario del vehiculo despachado, el tiempo de recorrido y las necesidades del usuario, permitiendo evaluar adicionalmente la influencia de las duraciones de las paradas y de paradas no programadas, se logra así que el operador optimice los despachos de acuerdo a la demanda real, sobretodo en áreas urbanas donde el tiempo de recorrido sea muy variable.

También se han utilizado técnicas de lógica difusa para agrupar viajes de trayectorias de vehículos y programar soluciones, tratando la semejanza de las cualidades entre ciudades como relación difusa mediante funciones de membresía

Amplias formulaciones en el campo del diseño y planeamiento de rutas de tránsito se han desarrollado, algunas tendientes a la predicción del tiempo de llegada de buses, e incluso en el análisis tridimensional del transporte para la planeación y diseño de sistemas o en la aplicación de algoritmos genéticos orientados al diseño de rutas de tránsito y determinación óptima de tiempos de transferencia en rutas de buses. Sin embargo, algunas de las predicciones no han sido muy alentadoras, puesto que en algunos casos la predicción en términos de series históricas han dado mejores resultados que las predicciones con información en tiempo real.

En el 2004 fue nutrida la aparición de aplicaciones neuro – difusas orientadas a la modelación del comportamiento de selección de ruta, considerando los varios factores del efecto sobre el viajero al momento de escoger una trayectoria. Al igual que en los casos anteriores el entrenamiento del sistema se basa en los datos extraídos de modelos experimentales y son evaluados bajo diferentes estados del tránsito.

---

<sup>26</sup> Las aplicaciones: Accidentalidad, programación de rutas, capacidad y niveles de servicio fueron tomadas del artículo "Estado del arte en la utilización de métodos de aprendizaje computacional aplicado a modelación de redes de transito" del Ingeniero Francisco Javier García

#### CAPACIDAD Y NIVELES DE SERVICIO.

En cuanto a la clasificación del flujo de tránsito , también se han hecho aplicaciones de sistemas de aprendizaje computacional como las redes neuronales, y respecto a la posibilidad de tener vehículos intercomunicados que se comporten como convoyes, lo que favorece la operación sobre la vía mejorando su operación.

Las redes neuronales se han explorado extensivamente como aproximaciones para la toma de decisiones. De esta forma se ha integrado las capacidades de aprendizaje de los sistemas de redes neuronales con la capacidad de toma de decisiones basada en el conocimiento de sistemas expertos, llegando a obtener un sistema inteligente de toma de decisiones en tiempo real, para uso del control de tráfico urbano. Los resultados de las extensas simulaciones indican que el sistema integrado proporciona un funcionamiento eficiente.

La aplicación de sistemas neuro - difusos a controladores de tránsito tampoco se ha hecho esperar, contándose con exitosas experiencias, que impactan directamente sobre los costos de instalación y mantenimiento, y que han demostrado mayor eficacia que los controladores tradicionales ; vale la pena destacar que esto solo aplica para intersecciones con bajos o medianos volúmenes de tránsito o donde se presentan grandes variaciones del flujo vehicular, pues en condiciones de saturación el sistema tiende a comportarse como controlador de tiempo fijo con ciclo óptimo máximo.

Se emplean redes neuronales para estimar los parámetros asociados a las funciones de membresía Gaussianas en el mecanismo de inferencia difuso. De esta forma se demuestra que el nuevo modelo en general proporciona una estimación más exacta de la capacidad de la zona de trabajo, especialmente cuando los datos para los factores que afectan la capacidad de la zona de trabajo están parcialmente disponibles.

## CONCLUSIONES

- ✓ Es de gran importancia el avance significativo que se ha logrado en el campo de las redes de transito mediante la utilización de sistemas basados en modelos matemáticos y biológicos, ya que estos cubren una amplia gama de problemas que vistos desde otros ángulos pueden resultar mas confusos de desarrollar.
- ✓ Existen muchos tipos de modelos matemáticos para la formulación de las redes de transito, algunos más complejos que otros, pero todos con alguna utilidad importante específica, se puede apreciar en esta monografía que existen cuatro etapas en la modelación de redes: Generación, Distribución zonal, Distribución modal y Asignación, las cuales fueron agrupados en este trabajo para una mejor comprensión, cabe notar que algunos modelos contienen varias etapas.
- ✓ En la formulación del giro a la izquierda el modelo que mas se utiliza es la distribución de Poisson, por lo tanto solo se dispuso este método.
- ✓ En la coordinación de redes de semáforos es muy utilizado el programa de computador TRANSYT en cualquiera de sus versiones (la mas conocida 7f), lo que se realizo en el aparte de coordinación de semáforos de esta monografía, fue introducir la explicación del Ingeniero Víctor Gabriel Valencia Alaix, que relaciona los procedimientos fundamentales realizados por este programa y en general lo que haría cualquier software similar.
- ✓ En la distribución de tiempos semaforicos se describió el modelo de Webster, el método simultáneo de Allsop y el modelo secuencial de Akcelik y se puede decir que este último es el más tradicional e importante.



## BIBLIOGRAFÍA

- ✓ INGENIERÍA DE TRANSITO. Fundamentos y aplicaciones. 7ª Edición. Rafael Cal y Mayor. James Cárdenas G. Editorial Alfaomega
- ✓ PRINCIPIOS SOBRE SEMÁFOROS. Víctor Gabriel Valencia Alaix. Universidad Nacional de Colombia. Sede Medellín. Facultad de Minas. Medellín. 2002.
- ✓ MEMORIAS IV CONGRESO DE INGENIERÍA DEL TRANSPORTE. José V. Colomer - Alfredo García (Eds.). Valencia. CIT2000.
- ✓ MODELACIÓN DE FLUJO DE TRANSITO DE AUTOS UTILIZANDO AUTÓMATAS CELULARES. Trabajo de grado. Rene Rodríguez Zamora. Universidad Autónoma de Puebla. Septiembre de 2002.
- ✓ CELLULAR AUTOMATA FOR ONE-LANE TRAFFIC FLOW MODELING. M.E. Lárraga. J.A. del Río. L. Álvarez-Icaza. Transportation Research Part C: Emerging Technologies. Volume 13, Issue 1 , February 2005, Pages 63-74.
- ✓ CURSO SOBRE TRÁFICO URBANO. Modelos de transporte. José Luís Maldonado Inocencio. Febrero de 1992 Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos Licenciado en Ciencias Económicas
- ✓ TRAFFIC ASSIGNMENT BY STRUCTURAL ANALYSIS METHODS. By James Robert Kladianos. Doctor of philosophy in Civil engineering. Laramie, Wyoming December, 2002
- ✓ APUNTES DE CLASE, MAGÍSTER EN INGENIERÍA DE TRANSPORTE. Universidad de Chile. Facultad de ciencias físicas y matemáticas. Departamento de ingeniería Civil. Sección ingeniería de transporte.
- ✓ AKCELIK, Rhami. *Traffic signals – Capacity and timing analysis*. Victoria, Australia, Australian Road Reserach Board. Research Report, ARR 123, 1981.
- ✓ VÍCTOR GABRIEL VALENCIA ALAIX. Maestría de Ingeniería - Infraestructuras y Sistemas de Transporte que se ofrece en la Sede Medellín de la Universidad Nacional de Colombia. Asignatura Teoría de Flujo de Tránsito. Si desea conocer la versión completa de este artículo se debe remitir a [vqvalencia@unalmed.edu.co](mailto:vqvalencia@unalmed.edu.co) para su obtención.
- ✓ FUZZY LOGIC AND NEURAL NETS IN INTELLIGENT SYSTEMS. Robert Fuller, [rfuller@ra.abo.fi](mailto:rfuller@ra.abo.fi), [www.abo.fi/~rfuller/robert.html](http://www.abo.fi/~rfuller/robert.html).

- ✓ FUZZY PERSPECTIVES IN TRAFFIC ENGINEERING. Serge Hoogendoorn. Delft University of Technology. Faculty of Civil Engineering and Geosciences, Transportation and Traffic Engineering section.  
Stevinweg 1 – P.O. Box 5048, NL-2600 GA Delft, The Netherlands